MEDDELELSE

FRA

DET NORSKE SKOGFORSØKSVESEN

NR. 52
(BIND XV HEFTE 4)

Reports of
The Norwegian Forest Research Institute

VOLLEBEKK 1959

NSP
RAM
20 APR 1959

MEDDELELSER

FRA

DET NORSKE SKOGFORSØKSVESEN

BIND XV

(HEFTE 49–52)

Reports of
The Norwegian Forest Research Institute

REDAKTØR:
PROFESSOR DR. ELIAS MORK

VOLLEBEKK 1957–59

Trykt hos J. Chr. Gundersen
Oslo - 1959

INNHOLD

		Side
J. Låg:	Undersøkelse av skogjorda i Agder ved Landsskogtakseringens markarbeid sommeren 1955	1
	Investigations on forest soils in Agder counties, Norway, in connection with the field work of the National Forest Survey	59
Jarle Bergan:	Såtidsforsøk med furufrø i Troms og Finnmark i vegetasjonsperioden	67
	Sowing experiments with seed of Scots pine during the growing season in Troms and Finnmark	101
Eyolf Bjørgung:	Så- og markberedningsforsøk i Evenstad statsskog	105
	Experiments on screefing and sowing in Evenstad state forest	117
Alf Bakke:	Mass Attack of *Brachonyx pineti* Payk. *(Col., Curculionidae)* on Pine Forests in Norway	121
	Masseangrep av furubarsnutebillen Brachonyx pineti *Payk.* (Col., Curculionidae) *på furuskog i Norge*	141
Martin Haugberg:	Produksjonsoversikter for osp. Foreløpig rapport	143
	Yield Tables for Aspen. Preliminary Report	182
J. Låg:	Undersøkelse av skogjorda i Sør-Trøndelag ved Landsskogtakseringens markarbeid sommeren 1956	187
	Investigations on forest soils in Sør-Trøndelag county, Norway, in connection with the field work of the National Forest Survey	244
Jarle Bergan:	Et gjødslingsforsøk i en yngre granplantning i Troms	249
	A Fertilizing Experiment in a Young Plantation of Norway Spruce in Troms	269
B. Meshechok:	Et forsøk med bruk av fullgjødsel ved planting av furu *(Pinus silvestris L.)* på myr. Foreløpig rapport	275
	An Experiment with Compound Fertilizer by Planting Scots Pine (Pinus silvestris L.) *on a Swamp. Preliminary Report*	302
—»—	Om plantemetoder for *Pinus contorta var. latifolia* Engelm. på myr. Foreløpig rapport	305
	On Planting Methods for Pinus contorta var. latifolia *Engelm. on Swamps. Preliminary Report*	323
Lars Strand:	Sampling for volume along a line	325
A. E. Traaen:	Undersøkelser over skade av kalsiumklorid på gran langs vei	333
	Injury to Norway Spruce Caused by Calcium Chloride Used to Combat Road Dust	372
Lars Strand:	Nøyaktigheten ved noen metoder til bestemmelse av kubikk- og tilvekstmassen på prøveflater	377
	The accuracy of some methods for estimating volume and increment on sample plots	382

Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/meddelelser-fra-det-norske-skogforsoksvesen_1959_15_4

DET NORSKE SKOGFORSØKSVESEN, VOLLEBEKK, NORGE

LARS STRAND

Nøyaktigheten ved noen metoder til bestemmelse av kubikk- og tilvekstmassen på prøveflater.

The accuracy of some methods for estimating volume and increment on sample plots.

Innhold.

Forord 282
1. Liste over symboler 283
2. Innledning 285
3. Materialet 287
4. Spesiell og generell forventningsskjevhet, beregning av middelfeilen 289
5. Kuberingsmetoder 291
   5.1 Kuberingstallene 291
   5.2 Kubering ved høydekurve 294
   5.3 Kubering ved masselinje og *dhf*-linje 313
   5.4 Kubering ved tariff, brøkestimator med tilfeldig utvalg og *sps*-utvalg 324
   5.5 Kubering ved stratifisert utvalg 328
   5.6 Kubering ved bestandsvolumtabell 331
   5.7 Kubering ved middelstammer 339
6. Samlet vurdering av kuberingsmetodene 344
7. Bestemmelse av tilveksten 353
   7.1 Grunnflatetilveksten 355
   7.2 Formhøydetilveksten 362
   7.3 Volumtilveksten 366
   7.4 Tilveksten på uttatte trær, tilvekstperiodens lengde 372
   7.5 Forutsigelse av framtidig tilvekst 375
8. Samlet vurdering av metodene for beregning av volumtilveksten 378
9. Sammendrag 379
The accuracy of some methods for estimating volume and increment on sample plots 382
Litteratur 386

Forord.

Markarbeidet til denne undersøkelsen ble foretatt i 1955 og 1956. Jeg var i denne tiden ansatt ved Institutt for skogskjøtsel, Norges Landbrukshøyskole. Bestyreren av instituttet, professor Ola Børset, ga meg de beste arbeidsforhold og søkte å avlaste meg så meget som mulig fra mitt øvrige arbeid.

Den største del av beregningene og sammenstillingen av resultatene har foregått mens jeg var midlertidig ansatt ved Det norske Skogforsøksvesen. Jeg fikk her utmerkete arbeidsmuligheter og anledning til å konsentrere meg om denne ene oppgaven.

Til bearbeiding av resultatene har jeg fått bidrag fra Skogbrukets og Skogindustrienes Forskningsforening. Skogteknikerne Reidar Tutturen, Alf Solberg, Magne Trongård, Tor Herman Thorsen, Erling Olimstad, Bernhard Høyberget, fru Eva Nilsen samt mr. Bruce Gourlay har tatt del i markarbeidet og/eller beregningene.

Professor O. Børset, godseier H. H. H. Heiberg og professor, dr. P. Braathe har lest gjennom utkastet til manuskript og gitt verdifulle råd.

Til alle dem som har hjulpet meg på forskjellige måter, vil jeg framføre min beste takk.

Vollebekk i november 1958.
Lars Strand.

1. Liste over symboler.

Symbolene er gjennomgående brukt på følgende måte: Latinske små bokstaver angir observerte eller estimerte verdier, greske eller latinske store bokstaver angir populasjonsverdier („sanne" verdier).

Symboler *Symbols*	Forklaring. *Explanation.*
b	Dobbelt barktykkelse. *Twice bark.*
b_1, b_2	Observerte regresjonskoeffisienter. *Observed regression coefficients.*
β_1, β_2	Populasjonens regresjonskoeffisienter. *Regression coefficients of the population.*
$\mathrm{cov}(ab)$	Kovarians for a og b. *Covariance of a and b.*
d_i	Brysthøydediameter for et bestemt tre. *Diameter at breast height for a particular tree.*
$\bar{d}$	Aritmetisk middeldiameter for prøvetrærne. *Arithmetic mean diameter of the sample trees.*
D	Aritmetisk middeldiameter for alle trær. *Arithmetic mean diameter for all trees.*
d_g	Grunnflatemiddeldiameter for prøvetrærne. *Basal area mean diameter for the sample trees.*
D_g	Grunnflatemiddeldiameter for alle trær. *Basal area mean diameter for all trees.*
d_+, d_-	Diametre for Hohenadl's middelstammer. *Diameters of Hohenadl's mean stems.*
ε_i	Tilfeldig variabel for en bestemt diameter. *Random variable for a particular diameter.*
E	Forventningsverdi. *Expected value.*
F	Bestandsformtall. *Form factor of the stand.*
g_i	Grunnflate i brysthøyde for et bestemt tre. *Basal area at breast height for a particular tree.*

G	Grunnflatesum for alle trær. *Basal area for all trees.*
G_k	Grunnflatesum i stratum (diameterklasse) k. *Basal area in stratum (diameter class) k.*
h_g	Høyde ifølge høydekurven ved diameter d_g. *Height according to the height curve for diameter d_g.*
h_L	Grunnflateveiet middelhøyde. *Mean height, basal area used as weight.*
i_d	Diametertilvekst for ett tre. *Diameter increment for one tree.*
I_g	Samlet grunnflatetilvekst. *Total increment in basal area.*
i_{fh}	Formhøydetilvekst for ett tre. *Form-height increment for one tree.*
I_{fh}	Gjennomsnittlig formhøydetilvekst for alle trær. *Average form-height increment for all trees.*
i_h	Høydetilvekst for ett tre. *Height increment for one tree.*
I_h	Gjennomsnittlig høydetilvekst for alle trær. *Average height increment for all trees.*
i_v	Volumtilvekst for ett tre. *Volume increment for one tree.*
I_v	Samlet volumtilvekst. *Total volume increment.*
m_i	i'te moment om middeltallet. *i'th moment about the mean value.*
n	Antall prøvetrær. *Number of sample trees.*
n_k	Antall prøvetrær i stratum k. *Number of sample trees in stratum k.*
N	Totalt treantall. *Total number of trees.*
N_k	Totalt treantall i stratum k. *Total number of trees in stratum k.*
p_g	Grunnflatetilvekstprosent. *Per cent increment in basal area.*
p_{fh}	Formhøydetilvekstprosent. *Per cent increment in form-height.*
s	Middelavvik for prøvetrærne, totalt eller for avvikelsene fra en regresjonsfunksjon. *Standard deviation of the sample trees, in all or as residuals for a regression function.*
σ	Forventningsverdi for s (standardavvik). *Expected value of s.*
$s(b)$	Middelfeil eller middelavvik for b. *Standard error or standard deviation for b.*
s_k	Middelavvik, totalt eller for avvikelsene fra en regresjonsfunksjon, i stratum k. *Standard deviation, in all or as residuals for a regression function, in stratum k.*
S	Sum for prøvetrærne. *Sum of the sample trees.*
$\sum_k$	Sum av k strata. *Sum of k strata.*
$\sum_N$	Sum for alle trær. *Sum of all trees.*
t	Tariffkubikkmasse for ett tre. *Tariff volume for one tree.*

T	Samlet tariffkubikkmasse. *Total tariff volume.*
T_k	Samlet tariffkubikkmasse i stratum k. *Total tariff volume in stratum k.*
v_i	Kubikkmasse med bark for en bestemt diameter. *Volume incl. bark, for a particular diameter.*
V	Samlet kubikkmasse med bark. *Total volume incl. bark.*
$V(b)$	Estimat på variansen for b. *Estimate of the variance of b.*
w_i	Vekttall for observasjon i. *Weight number for observation i.*
$\fallingdotseq$	Tilnærmet lik. *Approximately equal to.*
$\propto$	Proporsjonal med. *Proportional to.*

2. Innledning.

Intensiveringen av skogbruket følges i sin alminnelighet av økte krav om tallmessige oppgaver. Mange ansettelser som tidligere ble truffet på grunnlag av skjønn, blir i stigende grad basert på målinger av en eller annen art. Dette forholdet influerer også på bestemmelse av kubikk- og tilvekstmasse. To trekk kommer tydelig fram: 1) Mens en tidligere fant det tilstrekkelig å kjenne kubikk- og tilvekstmassen for store områder, er det i den senere tid blitt øket interesse for kubikk- og tilvekstbestemmelse for mindre enheter (avdelinger, bestand). 2) For å få holdepunkter for bestemte avgjørelser som det praktiske skogbruk står overfor (f. eks. relativ hogstmodenhet, virkningen av bestemte skogskjøtselsmessige tiltak), blir det mer vanlig at det utlegges spesielle prøveflater som kan belyse problemene.

Ser en bort fra de få tilfellene hvor det foretas totalklaving, vil bestemmelsen av kubikk- og tilvekstmassen være basert på prøveflater i en eller annen form. Prøveflatene kommer derved til å innta en sentral stilling i alle arbeider som berører bestemmelse av kubikk- og tilvekstmasse.

I mange tilfelle vil det være av betydning at kubikk- og tilvekstmassen for selve prøveflatene kan estimeres med så liten feil som mulig. Som regel er imidlertid dette ikke noe mål i seg selv. Ofte må prøveflatene oppfattes som et utvalg av en større populasjon. Dette kommer tydelig fram ved de ordinære takstene. Prøveflatene er her et middel til å bestemme kubikk- og tilvekstmassen for større enheter (bestand, hogstklasser osv.). Et liknende synspunkt gjør seg også gjeldende ved spesielle under-

søkelser. Oppgaven kan f. eks. være å undersøke virkningen av å fjerne et underbestand. For å få belyst dette problemet må det legges ut prøveflater. Bare i sjeldneste fall vil det være tilstrekkelig med én prøveflate, fordi populasjonen som regel vil omfatte større arealer. En enkelt prøveflate vil kunne være lite representativ, og det hjelper lite om den kuberes aldri så nøyaktig. Når det legges ut flere prøveflater, må en regne med at representasjonsfeilen blir mindre. Prøveflatene fører imidlertid med seg omkostninger av forskjellig art. Når midlene er begrenset, vil en alltid måtte velge mellom flere alternativer. Det er en fordel å ha så mange prøveflater som mulig. Men skal hver prøveflate kuberes meget nøyaktig, blir dette dyrt. For å redusere omkostningene, kan en bruke enklere metoder for å bestemme prøveflatenes kubikkmasse. De forskjellige alternativene vil derfor ofte bestå av forskjellige kombinasjoner av prøveflateantall og metoder for bestemmelse av kubikkmassen.

En diskusjon av nøyaktigheten ved metoder til bestemmelse av kubikk- og tilvekstmassen i sin alminnelighet, vil måtte bli meget omfattende. For å begrense arbeidet er de problemer som knytter seg til prøveflatenes representasjonsfeil, ikke behandlet nærmere. Undersøkelsen omfatter *metoder for bestemmelse av kubikk- og tilvekstmassen på den enkelte prøveflate.*

Ved vurderingen av de forskjellige metodenes brukbarhet, er i første rekke nøyaktigheten og den arbeidsinnsatsen som kreves, av betydning. Det er relativt enkelt å finne tallmessige uttrykk for nøyaktigheten, vanskeligere for arbeidsinnsatsen. Ved tidsstudier kan en komme et stykke på vei, men resultatene vil for en stor del avhenge av hvilke instrumenter som brukes, i hvilken grad en har regnemaskiner til rådighet, hvor trenet observatørene og beregnerne er osv. For praktiske formål spiller det heller mindre rolle om en ikke direkte kan gi et tallmessig uttrykk for arbeidsinnsatsen. Ved valg mellom flere metoder er det som regel tilstrekkelig å vite hvilke som er meget, middels eller lite arbeidskrevende. Derimot synes det ønskelig å få *sikrere uttrykk for nøyaktigheten ved de forskjellige metodene.* Dette er av betydning for å få sjaltet ut de mer ineffektive metodene, og for å få sikrere holdepunkter for hvilken nøyaktighet en har på en enkelt bestemmelse. De undersøkelser vi idag har å bygge på, er dessverre relativt få.

I og med at hovedvekten er lagt på å finne fram til nøyaktigheten, kreves det et ganske omfattende beregningsarbeid. En vil derfor stå overfor valget mellom to alternativer: Enten å behandle et par metoder på en rekke bestand eller å prøve flere metoder på et mindre antall bestand. Det siste alternativet ble valgt av flere grunner. De to viktigste er: 1) Det er av betydning å kunne sammenlikne metodene. Dette gjøres best ved å undersøke flere metoder på det samme bestandet. 2) Flere kuberings-

metoder og metoder til bestemmelse av tilveksten som har funnet utstrakt anvendelse i andre land, bør undersøkes noe nærmere. Det byr på vanskeligheter å få sammenliknet disse metodene med de som er vanlige hos oss hvis en skal behandle svært mange bestand.

Diskusjonen av forskjellige metoder til bestemmelse av tilveksten er i det vesentlige begrenset til *metoder som bygger på engangsmåling*. Bortsett fra vitenskapelige undersøkelser blir tilveksten i de fleste tilfelle bestemt på denne måten.

Nøyaktigheten ved de forskjellige metodene må for en stor del baseres på en beregnet middelfeil. Det medfører at en ganske vesentlig del av undersøkelsen må vies diskusjonen av hvordan middelfeilen bør beregnes. Riktignok foreligger det en ganske omfangsrik litteratur som berører dette spørsmålet. Men en støter på en rekke problemer av spesiell karakter, hvor det er grunn til å diskutere beregningen av middelfeilen mer i detalj.

3. Materialet.

På forskjellige steder i Øst-Norge ble prøveflater utlagt i ren granskog. Hovedvekten ble lagt på å få representert bestand av forskjellig karakter – glisne og tette, unge og gamle. Den nøyaktige plaseringen av den enkelte flate foregikk skjønnsmessig. På noen flater er det en stor variasjon i tetthet innen flaten. På den ene delen kan det være et glissent parti, på den andre delen et tett holt. Derimot er det ikke bonitetsvariasjoner av betydning innen flatene.

De fleste flatene er sirkelformete med areal 1 dekar. I noen tilfelle (unge, tette bestand) er den ene halvdelen sløyfet.

Flatene ble kartlagt og beliggenheten av trær og stubber avmerket. Alle trær med diameter over 3 cm i brysthøyde ble klavet korsvis og høydemålt ved hjelp av høydemålestang eller Blume-Leiss høydemåler.

For registrering av tilveksten ble prøvetrær utvalt. Utvalget foregikk på grunnlag av treantallslisten ved kvotient. Kvotienten ble satt slik at det skulle være minst 30 prøvetrær for hver flate. På hvert prøvetre ble målt: 1) Bredden av 10 siste årringer i to retninger, loddrett på hverandre. Den ene prøven ble tatt helt inn til margen slik at treets alder kunne bestemmes. 2) Høyden for 10 år siden, ved telling av kvistkranser og måling med høydemålestang eller Blume-Leiss høydemåler. 3) Barktykkelsen, med vanlig barkmåler.

En oversikt over flatene er gitt i tabell 3.1. Den alderen som der er oppført, gjelder grunnflateveiet middelalder.

Tabell 3.1. Noen data for flatene.
Some data for the sample plots.

Flate nr. *Plot No.*	Herred *District*	Areal *Area*	Br.h. alder *Age, bh.*	Middel-høyde *Mean height*	Grf. sum *Basal area*	Treantall pr. ha. *Number of stems per ha.*	Diameterens variasjons-koeffisient *Coefficient of variation for the diam.*
		da	år	m	m²/ha		%
1	Ås	1	43	19,3	20,1	500	67
2	Idd	1	81	18,6	28,1	940	44
3	»	1	61	20,5	20,0	440	66
4	»	1	34	8,7	11,6	2 560	43
5	»	1/2	32	10,5	29,3	5 220	52
6	»	1	84	17,3	25,0	960	46
7	»	1	56	12,3	18,4	1 670	50
8	Stange	1	79	24,9	25,3	510	64
9	»	1	58	24,7	33,2	530	25
10	»	1	47	22,2	40,5	760	34
11	»	1	69	21,2	28,1	680	28
12	»	1	58	20,9	29,9	800	28
13	»	1	43	16,6	18,9	1 190	47
14	»	1	69	21,9	28,3	650	32
15	»	1	53	14,3	25,6	1 840	48
16	Modum	1	96	13,2	9,1	670	69
17	»	1	51	15,4	10,8	690	78
18	»	1	98	15,7	8,8	470	69
19	»	1	78	18,6	17,5	800	75
20	»	1/2	42	12,6	19,2	1 140	66
21	Borre	1	53	21,8	29,6	840	59
22	»	1	57	20,1	26,7	770	68
23	»	1	42	20,1	14,2	410	74
24	»	1/2	30	15,3	24,7	1 600	77
25	»	1	48	20,8	29,8	830	61
26	Ringsaker	1	127	14,7	12,6	620	60
27	»	1	98	16,6	9,9	280	19
28	Veldre	1	106	11,8	13,4	690	30
29	»	1	104	16,0	12,3	440	38
30	Ås	1	80	20,7	19,0	460	40
31	»	1	106	20,9	23,2	590	53
32	»	1	66	20,4	18,8	420	37
33	Spydeberg	1	21	10,0	12,6	1 690	48
34	»	1	31	13,4	23,7	1 840	55
35	»	1	42	14,3	16,2	1 230	64
36	Bærum	1	130	15,7	16,3	560	55
37	»	1	114	20,4	15,4	340	55
38	»	1	110	15,9	7,6	410	66
39	»	1	64	13,5	15,5	1 020	68
40	»	1	32	12,6	12,2	1 040	58
41	»	1/2	76	21,8	19,6	280	47
42	»	1/2	32	10,5	10,5	1 360	64

4. Spesiell og generell forventningsskjevhet, beregning av middelfeilen.

Ethvert estimat som er basert på et sampel (= utvalg) kan være beheftet med feil. Feilen er differensen mellom den riktige verdien og den verdien som er funnet.

Feilene deles gjerne i to grupper: Tilfeldige og systematiske feil. Det er karakteristisk for de tilfeldige feilene at de har like sterk tendens til å gå i positiv som i negativ retning. Middeltallet av en rekke tilfeldige feil vil derfor konvergere mot 0 når antall observasjoner øker. Hvis middeltallet konvergerer mot en annen verdi enn 0, foreligger det også en systematisk feil. Størrelsen av den systematiske feilen er lik differensen mellom den verdien som middeltallet konvergerer mot og den sanne verdien. Når et estimat konvergerer mot en bestemt verdi som angir den „sanne" verdien, sies estimatet å være forventningsrett. Det vil da være fritt for systematiske feil. Konvergerer det derimot mot en annen verdi enn den „sanne", er estimatet beheftet med forventningsskjevhet.

Det er en fordel om estimatene er forventningsrette. Dette er imidlertid ikke noen betingelse for brukbarheten. Forventningsskjevheten må vurderes i relasjon til middelfeilen (som uttrykker den tilfeldige feilen). Hvis forventningsskjevheten bare utgjør noen få prosent av middelfeilen, vil den være så liten at den ikke har noen betydning. I mange tilfelle er det også slik at en metode som gir forventningsrette estimater, krever større arbeidsinnsats. Spørsmålet er om økningen i arbeidsinnsats står i forhold til betydningen av reduksjonen i forventningsskjevhet.

I forbindelse med diskusjonen av forskjellige metoder til bestemmelse av kubikk- og tilvekstmasse er det ofte nyttig å skille mellom to tilfelle av forventningsskjevhet. Noen metoder bygger på forutsetninger som ikke er oppfylt i praksis. De estimatene en da får, vil ha *generell* forventningsskjevhet. Andre metoder kan bygge på forutsetninger som stort sett er riktige, men som ikke gjelder for hver enkelt prøveflate. Estimatene vil da ha *spesiell* forventningsskjevhet,

Størrelsen av forventningsskjevheten uttrykkes ved differensen mellom forventningsverdien for estimatet og populasjonsverdien. Når populasjonsverdien ikke er kjent, må den estimeres ved metoder som en vet gir forventningsrette estimater. Forventningsskjevheten må i så fall bestemmes som differensen mellom to estimater som begge er beheftet med feil. Det ene estimatet vil være bestemt ved den metoden som skal undersøkes, det andre estimatet ved en metode som gir forventningsrette estimater. Når forholdet ligger slik an, har det liten hensikt å bygge på resultatet fra den enkelte flate. Gjennomsnittstallene for en rekke flater må brukes.

Størrelsen av den tilfeldige feilen på et estimat uttrykkes ved middelfeilen. I sin alminnelighet er denne avhengig av prøvetrærnes antall og fordeling, populasjonsstørrelsen og variasjonen innen populasjonen.

I det tilfelle at alle trærne er målt, kan den „sanne" middelfeilen beregnes. Brukes f. eks. tilfeldig utvalg, er standardavviket gitt ved formelen

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{4–1}$$

hvor x_i er observasjonen for tre i. Middelfeilen for middeltallet av n observasjoner er

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{4–2}$$

Denne verdien kan brukes som forventningsverdi for det estimatet på middelfeilen som en får ved formelen

$$s(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{4–3}$$

hvor

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} S (x_i - \bar{x})^2}. \tag{4–4}$$

I det foreliggende tilfelle, hvor kubikkmassene for alle trær på prøveflatene er kjente, er middelfeilene bestemt ut fra den „sanne" middelfeilen for kubikkmassens vedkommende.

I praksis kan det ofte by på visse vansker å foreta et tilfeldig utvalg. Det er atskillig enklere å bruke en form for systematisk utvalg (f. eks. ved kvotient). Imidlertid hefter det visse ulemper ved denne formen for utvalg. Den viktigste er kanskje at beregningen av middelfeilen blir umulig uten å innføre bestemte forutsetninger. Det kan f. eks. forutsettes at observasjonene etter et systematisk utvalg har samme „tilfeldige" karakter som etter et tilfeldig utvalg. Det vil si at det systematiske utvalget i realiteten har gitt et tilfeldig utvalg av populasjonen. Middelfeilen kan da beregnes som for et tilfeldig utvalg. Ofte kan det imidlertid foreligge systematiske variasjoner i populasjonen. Det vil si at det er en viss (positiv eller negativ) korrelasjon mellom nærliggende enheter. Også i dette tilfelle kan en finne estimater for middelfeilen, men det må da gjøres bestemte antakelser med hensyn til denne korrelasjonen. Det kan f. eks. forutsettes at korrelasjonen er en monotont avtagende funksjon av avstanden mellom enhetene (sml. MATÉRN 1947). Dette forholdet at en må gjøre bestemte antakelser for å kunne finne et tilfredsstillende estimat på middelfeilen,

er den største ulempen ved et systematisk utvalg. Ved et tilfeldig utvalg unngår en som regel dette.

I den foreliggende undersøkelsen er problemet aktuelt i forbindelse med prøvetrær for bestemmelse av tilveksten. Prøvetrærne ble valt ut etter kvotient. Det ble ansett for å være lite sannsynlig at det skulle foreligge systematiske variasjoner av en slik betydning at det ikke var tillatelig å beregne middelfeilene som for et tilfeldig utvalg.

Det er vanlig ved bestemmelser av kubikk- og tilvekstmassen for praktiske formål at prøvetrærne velges ut systematisk. På den annen side forutsettes tilfeldig utvalg ved de vanlige måtene for beregning av middelfeilen. Hvis det foreligger systematiske variasjoner i populasjonene slik som nevnt, kan det bli en uoverensstemmelse mellom den måten arbeidet blir utført på og forutsetningene for beregning av middelfeilen. Det synes vanskelig å finne en tilfredsstillende løsning på dette problemet.

For uendelige populasjoner vil middelfeilen for en gitt fordelingsmåte for prøvetrærne stort sett være omvendt proporsjonal med kvadratroten av prøvetreantallet. Av dette følger at middelfeilen for et hvilket som helst prøvetreantall kan beregnes ganske enkelt når en kjenner middelfeilen for et visst antall.

For endelige populasjoner er ikke forholdet så enkelt, idet middelfeilen her er avhengig av en faktor som angir forholdet mellom populasjonens og sampelets treantall. Hvis det samlete treantallet er stort i forhold til prøvetreantallet (f. eks. $N/n > 10$), kan middelfeilen for forskjellig prøvetreantall estimeres som om populasjonen var uendelig.

Når det brukes en fast prøveflatestørrelse (som her er $^1/_2$ eller 1 dekar), vil den virkelige middelfeilen for kubikk- og tilvekstmassen bli avhengig av det samlete treantallet. Hvis en har to flater som er ganske like bortsett fra at den ene flaten har dobbelt så stort treantall som den andre, vil middelfeilen bli minst i det første tilfellet (forutsatt samme prøvetreantall og -fordeling). For at ikke resultatene skal bli avhengige av treantallet (flatestørrelsen), er *alle middelfeilene beregnet som om populasjonene var uendelige. Det er alltid forutsatt 20 prøvetrær.*

5. Kuberingsmetoder.

5.1 *Kuberingstallene.*

Forskjellen mellom de kuberingsmetodene som er i bruk, består i første rekke i hvilke kuberingstall som legges til grunn og hvilken beregningsmetodikk som brukes.

Kuberingstallene kan skaffes direkte ved seksjonskubering av prøve-

trærne, eller ved tabeller (stamme- og bestandsvolumtabeller). Når kuberingen foretas ved tabeller, måles bare diameteren, høyden og eventuelt en formangiver (kronegrense, formpunkthøyde) på prøvetrærne.

Når kuberingen foretas på grunnlag av kuberingstabeller, vil kubikkmassen av det enkelte bestand kunne bli bestemt med en viss forventningsskjevhet. Dette skyldes at en kubikktabell alltid må gjelde for større geografiske områder, mens det ser ut til å være lokale variasjoner mellom bestandene hva formen angår. En undersøkelse av Fog og Jensen (1954) for dansk bøk er illustrerende i denne forbindelse. Materialet besto av en rekke prøvetrær fra forskjellige bestand. Det ble foretatt numerisk utjevning av enkelttrærnes kubikkmasse med diameter og høyde som uavhengige variable. For å få lineær regresjon og konstant residualspredning, ble brukt logaritmer (sml. Schumacher og Hall 1933)

$$\log v = b_1 + b_2 \log d + b_3 \log h. \qquad (5.1\text{–}1)$$

En nærmere analyse viste at regresjonsplanene for de forskjellige bestandene var parallelle (dvs. at regresjonskoeffisientene b_2 og b_3 ikke var signifikant forskjellige). Derimot var det ganske sterk variasjon i konstantleddet b_1 fra bestand til bestand. Det synes å være „nivåforskjeller" mellom bestandene. Middelavviket for „nivåene" var av størrelsesorden 5 %.

For norsk gran foreligger dessverre ingen tilsvarende undersøkelse. Det er derfor vanskelig å få et direkte mål for hvor store nivåforskjellene mellom bestand kan være. Men et visst begrep om størrelsesordenen kan en få ved de kuberingene som er foretatt ved etterprøving av kubikktabeller.

Eide (1923) undersøkte sin kubikktabell på 36 felter. Kubikkmassen ble bestemt både direkte etter tabellen og med støtte i seksjonskuberte prøvetrær. Forskjellen mellom de to kubikkmassene oversteg ikke 5,1 %. Her må en også ta hensyn til at de seksjonskuberte prøvetrærne bare utgjorde en del av det totale treantallet. Den sanne kubikkmassen for de enkelte feltene var ikke kjent. Forskjellen mellom „tabellkubikkmasse" og sann kubikkmasse er derfor sannsynligvis ikke i noe tilfelle så stor som 5 %.

Näslund (1947) prøvde sine kubikktabeller på sett av 20 seksjonskuberte prøvetrær fra hver av 10 forskjellige prøveflater. Forskjellen mellom tabellkubikkmasse og virkelig kubikkmasse var alltid under 3,4 %, når den minste tabellen ble brukt (med inngang diameter og høyde).

Brantseg (1951) fant forskjeller i form mellom øst-norsk og vest-norsk gran. Ved kubering av 12 forsøksfelter i Vest-Norge ga kubikktabell for øst-norsk gran verdier som lå fra 0,2 til 4,6 % lavere enn når kuberingen

ble foretatt ved tabell som gjaldt for vest-norsk gran. En etterprøving av „Vestlandstabellen" på de felte trærne fra 9 forsøksfelter viste en differens mellom tabellkubikkmasse og virkelig kubikkmasse som varierte fra 0,5 til 6,9 %.

De tre etterprøvingene som er nevnt her, ble foretatt på bestand som må karakteriseres som noenlunde normale. Resultatet kan bli noe annerledes for undersøkelser i vanlige bestand. Slike undersøkelser er foretatt bl. a. av HAUGBERG (1927), SCHOBER (1933), SPEER (1938) og HAUSSER (1953/54). Forskjellen mellom tabellkubikkmasse og virkelig kubikkmasse var noe større enn hos EIDE (l.c.), NÄSLUND (l. c.)og BRANTSEG (l.c.), men gjennomgående ikke vesentlig over 5 %. Det ser altså ut til at tabellfeilen sjelden overstiger 5 %.

Det ble ikke tatt seksjonskuberte prøvetrær på de flatene som danner grunnlaget for den foreliggende undersøkelsen. Spørsmålet om i hvilken grad det foreligger „nivåforskjeller" mellom bestandene, og om tabellfeilen derfor vil gjøre seg gjeldende, er ikke tatt opp til nærmere drøftelse. Diskusjonen vil bli begrenset dels til de systematiske feilene som skyldes selve kuberingsmetoden, dels til de tilfeldige feilene som skyldes begrenset prøvetreantall. Med denne problemstillingen blir *utgangspunktet at den kubikkmassen som blir bestemt på grunnlag av kubering av alle trærne etter stammevolumtabell, gjelder som den virkelige kubikkmassen.* Eide's kubikktabell med bark (EIDE 1923) ble brukt ved kuberingene.

Det er ikke foretatt egen behandling av kubikkmassen uten bark. Barkens volum spiller relativt liten rolle i forhold til trærnes volum. Barken vil derfor neppe ha noen innflytelse på det innbyrdes forholdet mellom kuberingsmetodene. Den metoden som er best for kubering på bark, vil også være best for kubering under bark.

Alle de kuberingsmetodene som blir behandlet, kan brukes for kubering under bark. På grunn av den feilkilden som innføres ved måling av barktykkelsen, må en regne med et noe større prøvetreantall for å få bestemt kubikkmassen under bark enn på bark. Men hvis barktykkelsen blir målt på alle prøvetrærne, blir denne forskjellen i prøvetreantall liten.

De kuberingsmetodene som er i bruk, bygger på nokså ulike prinsipper. Stort sett faller de i 3 hovedgrupper. Den ene gruppen omfatter forskjellige former for regresjons- eller brøkestimering. Denne gruppen omfatter metodene:

Kubering ved høydekurve,
Kubering ved masse- eller *dhf*-linje,
Kubering ved tariff.

Den andre gruppen omfatter forskjellige former for stratifisert utvalg. Til den tredje gruppen kan regnes de forskjellige kuberingsmetodene som

bygger på bruk av middelstammer i en eller annen form. Hit kan også regnes kubering etter bestandsvolumtabell.

Kuberingsmetodene varierer også med hensyn til hvordan prøvetrærne velges ut. Et utvalgsprinsipp skal nevnes her, nemlig „utvalg med sannsynlighet proporsjonal med størrelsen". Hva prinsippet innebærer, ligger i selve benevningsmåten. Det kan brukes forskjellige mål på „størrelsen". Det vanligste er å bruke diameteren eller en funksjon av denne som mål. Utvalgsmåten er i det følgende forkortet til „*sps-utvalg*".

5.2 *Kubering ved høydekurve.*

En av de kuberingsmåtene som er mest brukt, er kubering ved hjelp av høydekurve: Alle trærne klaves og antallet stikkes diameterklassevis. Det foretas høydemålinger av endel prøvetrær. På grunnlag av prøvetrærnes høyder opprettes en høydekurve. Utjevningen av prøvetrematerialet kan foretas grafisk eller numerisk.

For hver diameterklasse bestemmes høyden etter høydekurven, enten for en diameter som svarer til klassemidten, eller for en diameter som svarer til aritmetisk middeldiameter av prøvetrærne i klassen. Så lenge det brukes trange diameterklasser, er det relativt liten forskjell mellom disse to måtene. Volumet av kubikkmiddelstammene bestemmes ved hjelp av en stammevolumtabell ved diameteren og høyden ifølge høydekurven. Den samlete kubikkmassen finnes ved å danne produktsummen av treantall og volumene av kubikkmiddelstammene i diameterklassene. Arbeidet kan forenkles på flere måter (se f. eks. Tischendorf 1937).

Det er en stor fordel ved denne kuberingsmåten at en ikke er så sterkt bundet m. h. t. valg av prøvetrær. Det spiller ingen rolle om det mangler prøvetrær i en eller flere diameterklasser.

Det er hensiktsmessig å behandle høydekurven særskilt, fordi det er en sterk sammenheng mellom denne kurvens egenskaper og virkemåten for de forskjellige kuberingsmetodene.

For rent praktiske formål er det vanlig å utjevne prøvetrærnes høyder grafisk. Östenå (1956) undersøkte denne utjevningsmåten nærmere, idet han sammenliknet høydekurver som var opptrukket av forskjellige personer for ett og samme takstmateriale. Det viste seg å være store forskjeller mellom kurvene.

5.2.1 *Numerisk utjevning av høydekurven.*

For å eliminere den usikkerheten som hefter ved grafisk utjevning, kan numerisk utjevning benyttes. Til dette formål er foreslått en rekke funksjonstyper, f. eks.:

$$h = b_1 \frac{1}{g} + b_2 \qquad \text{(Assmann 1936)} \qquad (5.2.1\text{–}1)$$

$$h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2 \qquad \text{(Näslund 1929, Peschel 1936, Assmann 1943)} \qquad (5.2.1\text{–}2)$$

$$h = \frac{d^2}{(b_1 + b_2 d)^2} + 1{,}3 \qquad \text{(Näslund 1937)} \qquad (5.2.1\text{–}3)$$

$$h = b_1(1 - e^{-b_2 d}) + 1{,}3 \qquad \text{(Meyer 1940)} \qquad (5.2.1\text{–}4)$$

$$h = b_1 e^{-b_2/d} + 1{,}3 \qquad \text{(Michailoff 1943)} \qquad (5.2.1\text{–}5)$$

$$h = b_1 d^{b_2} \qquad \text{(Stoffels 1950)} \qquad (5.2.1\text{–}6)$$

$$h = b_1 + b_2 \log d \qquad \text{(Henriksen 1950)} \qquad (5.2.1\text{–}7)$$

$$h = \frac{d^2}{b_1 + b_2 d + b_3 d^2} + 1{,}3. \qquad \text{(Prodan 1951)} \qquad (5.2.1\text{–}8)$$

Disse funksjonene har noe forskjellig karakter. Noen er krumme bare en vei, noen er krumme begge veier. Denne forskjellen er imidlertid i de fleste tilfelle ikke av vesentlig betydning. Riktignok har høydekurven i noen bestand et S-formet forløp, og en høydekurve som er krum begge veier vil passe best. Men dette forløpet er relativt sjeldent. Det forekommer noen ganger i bestand med meget stor diameterspredning.

Det store antall funksjonstyper som er foreslått for høydekurven, gjør det klart at en numerisk utjevning heller ikke er helt fri for subjektive momenter. Valget mellom funksjonstypene må som regel foretas mer eller mindre på skjønn. Riktignok kan det på et teoretisk grunnlag reises innvendinger mot enkelte funksjonstyper, idet de ikke er „logisk" bygget opp (se f. eks. Levakovic 1935). Det er imidlertid tvilsomt hvor vidt en kan avgjøre funksjonstypen ad „logisk" vei. Sammenhengen mellom diameter og høyde er av statistisk karakter, og det er i første rekke materialet som avgjør hvilken funksjonstype som passer best.

En god utjevning får en som regel ved bruk av minste kvadraters metode. Velges f. eks. funksjonstypen

$$h = b_1 + b_2 \log d\,, \qquad (5.2.1\text{–}7)$$

finnes koeffisientene b_1 og b_2 ved løsning av likningssystemet

$$\left.\begin{aligned} b_1 n + b_2 S(\log d) &= S h \\ b_1 S(\log d) + b_2 S(\log d)^2 &= S(h \log d). \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.1\text{–}9)$$

Hvis funksjonstypen ikke er lineær, er det vanlig å foreta transformasjoner for å få den på en slik form. Ved funksjonstypen

$$h = \frac{d^2}{b_1 + b_2 d^2} + 1{,}3 \qquad (5.2.1\text{–}10)$$

settes f. eks.:

$$z = \frac{d^2}{h - 1{,}3} \qquad (5.2.1\text{–}11)$$

og verdiene av b_1 og b_2 i likningen

$$z = b_1 + b_2 d^2 \qquad (5.2.1\text{–}12)$$

bestemmes ved et likningssett analogt med formel (5.2.1–9).

En annen mulighet er å bestemme verdien av b_1 og b_2 ved å minimalisere uttrykket

$$F(b_1,b_2) = S\left(h - \frac{d^2}{b_1 + b_2 d^2} - 1{,}3\right)^2. \qquad (5.2.1\text{–}13)$$

Dette kan ikke gjøres i én operasjon. Det må brukes suksessive approksimasjoner. (Det henvises til Deming (1948) angående ytterligere detaljer.)

Ved undersøkelser for vitenskapelige formål kan koeffisientene i høydekurvene finnes ved minste kvadraters metode som nevnt. Dette krever imidlertid atskillig regnearbeid. I mange tilfelle kan en greie seg med noe enklere metoder. En slik metode som egner seg godt for utjevning av polynomer, bygger på „grupperte gjennomsnitt" (Nair og Shrivastava 1942, Henriksen 1950). Hvis formel (5.2.1–7) skal brukes, dannes gjennomsnitt i to grupper. Den nedre gruppen kan f. eks. omfatte den halvdel av prøvetrærne som har de minste diametrene, den øvre gruppen omfatter den halvdel av prøvetrærne som har de største diametrene. For hver gruppe bestemmes gjennomsnittlig høyde ($\bar{h}$) og gjennomsnittlig logaritmisk diameter ($\overline{\log d}$). Gis middeltallene for nedre gruppe indeks 1 og for øvre gruppe indeks 2, finnes koeffisientene ved likningene

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2\,\overline{\log d_2} &= \bar{h}_2 \\ b_1 + b_2\,\overline{\log d_1} &= \bar{h}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.1\text{–}14)$$

Det er interessant å notere at estimatene i noen tilfelle får minst tilfeldig feil hvis endel av observasjonene blir sløyfet. Hvis f. eks. fordelingen av $\log d$ er rektangulær (dvs. at avstanden mellom de enkelte, rangerte

observasjoner er like stor over hele variasjonsområdet), får en størst nøyaktighet på bestemmelsen av b_2 ved å sløyfe en tredjedel av observasjonene, nemlig de som faller i det midtre området.

Den samme framgangsmåten kan brukes for andre formler. For bestemmelsen av koeffisientene i en annengradsfunksjon dannes tre grupper, og koeffisientene finnes ved løsning av et likningssett lik (5.2.1–14) bare med den forskjell at det er tre likninger med tre ukjente.

Et eksempel kan gjøre framgangsmåten ved en av disse „hurtigmetodene" litt klarere. For flate nr. 1, som ialt har 50 trær, skal det foretas utjevning av høydekurven etter annengradsfunksjonen $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$. Materialet deles i tre grupper: De 16 minste trærne danner en gruppe, de 16 mellomste en, og de 18 største en. For hver gruppe beregnes gjennomsnittlig høyde, diameter og diameterkvadrat. Gjennomsnittene framgår av følgende tabell:

Gruppe	$\overline{h}$	$\overline{d}$	$\overline{d^2}$
Minste trær	4,4 m	5,3 cm	30,4 cm²
Mellomste trær	13,5 »	15,6 »	250,2 »
Største trær	20,5 »	33,9 »	1 175,7 »

På grunnlag av disse tallene kan en danne følgende likningssystem:

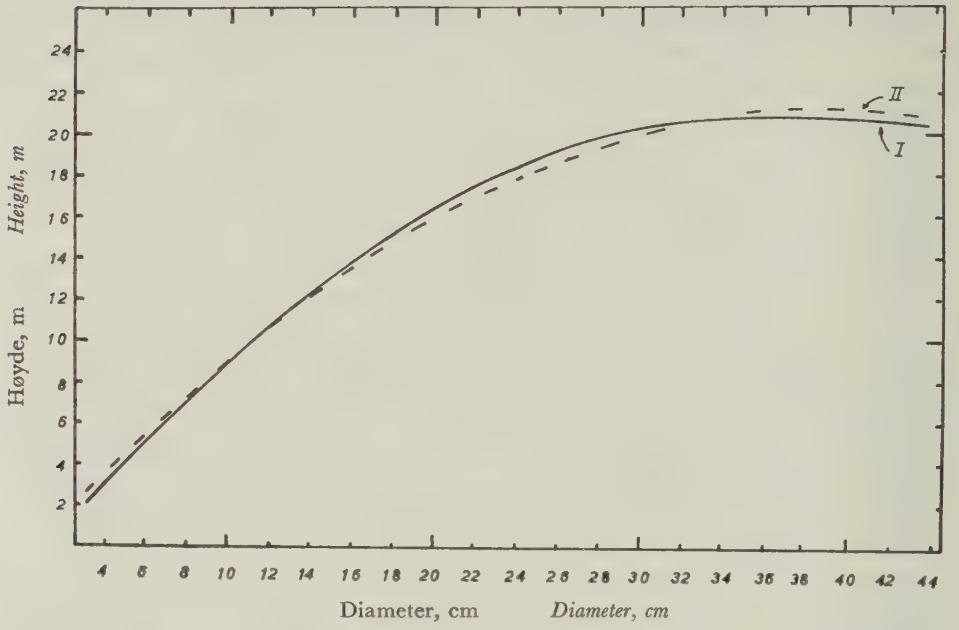
$$b_1 + 5{,}3\, b_2 + 30{,}4\, b_3 = 4{,}4$$
$$b_1 + 15{,}6\, b_2 + 250{,}2\, b_3 = 13{,}5$$
$$b_1 + 33{,}9\, b_2 + 1175{,}7\, b_3 = 20{,}5.$$

Løses dette likningssystemet, finnes verdiene: $b_1 = -1{,}70$, $b_2 = 1{,}25$ og $b_3 = -0{,}0171$. Løsning etter minste kvadraters metode gir verdiene: $b_1 = -0{,}89$, $b_2 = 1{,}14$ og $b_3 = -0{,}0147$. Det er endel forskjell mellom verdiene av koeffisientene bestemt på de to måtene. I figur 5.1 er begge kurvene inntegnet. Som det framgår av figuren, forløper kurvene ganske likt, bortsett fra verdier over ca. 35 cm.

Andre metoder til „hurtigbestemmelse" av høydekurven er gitt av Ker og Smith (1955, 1957).

5.2.2 *Enhetshøydekurver.*

Undersøkelser har vist at høydekurvene forløper noenlunde ens for bestand av samme middelhøyde. I noen tilfelle synes det som om alderen (boniteten) har en viss betydning i tillegg til høyden (se f. eks. Wiedemann 1936), men denne virkningen er liten. Det er derfor mulig å stille



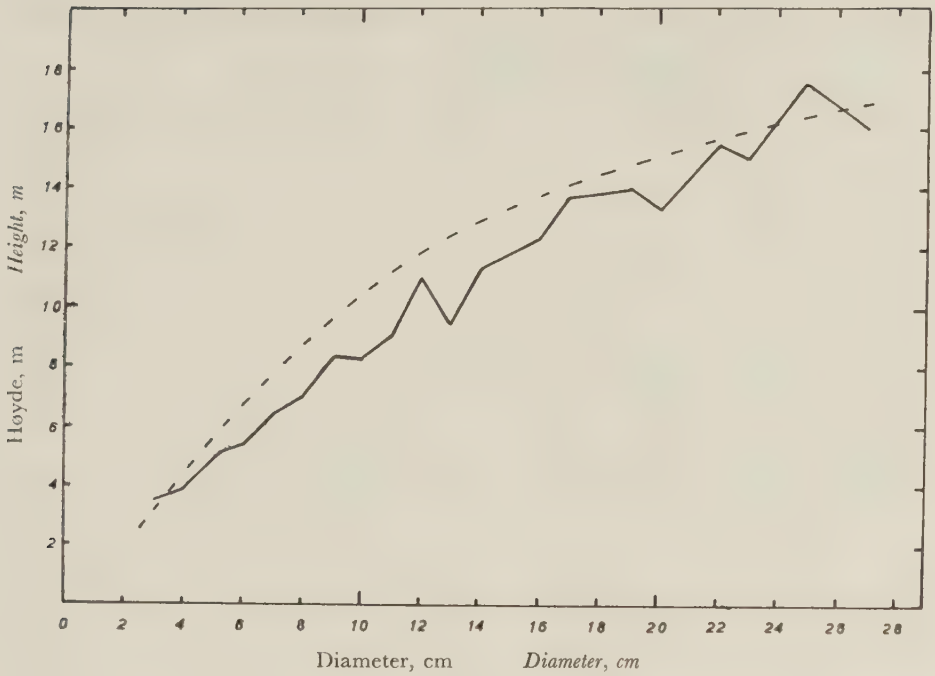
Figur 5.1. Høydekurve for flate nr. 1 bestemt ved grupperte gjennomsnitt (I) og ved minste kvadraters metode (II).

Figure 5.1. Height curve for sample plot No. 1 determined by the method of grouped averages (I) and by the method of least squares (II).

opp gode „enhetshøydekurver" (tysk: Einheitshöhenkurven) som viser det gjennomsnittlige forløpet av høydekurvene, for et bestemt treslag med en viss middelhøyde (von Bronsart 1936, Wiedemann 1936, Lang 1938, Krutsch og Loetsch 1938, Loetsch 1952, Emrovic 1953 a og Kräuter 1955).

Det foreligger ingen norske enhetshøydekurver som direkte kan sammenliknes med de nevnte. Eide og Langsæter (1941) har utarbeidet en tabell som viser høyden for de forskjellige diametertrinnene i prosent av grunnflateveiet middelhøyde. Hvis tabellen brukes i unormale bestand viser det seg at høydekurven ofte blir liggende for høyt eller for lavt. Dette skyldes i første rekke at den høyden som i dette tilfelle brukes til konstruksjon av høydekurven, ikke ligger på kurven selv (slik som f. eks. høyden av det treet som har en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren). I figur 5.2 er vist et eksempel på dette, idet høydekurven for flate nr. 40 er sammenliknet med den høydekurven som er beregnet etter figur 10 hos Eide og Langsæter (l.c.).

Bruken av enhetshøydekurver er ikke diskutert nærmere, fordi det ikke



Figur 5.2. Eksempel på høydekurve beregnet etter figur 10 i produksjonstabellen (EIDE og LANGSÆTER 1941), flate nr. 40.

*Figure 5.2. Example of height curve determined by use of Figure 10 in the yield table for spruce (*EIDE og LANGSÆTER *1941), sample plot No. 40.*

foreligger egnete høydekurver, og fordi det synes å være andre kuberingsmetoder som er like raske i bruk som kubering med støtte i enhetshøydekurver, og som gir minst like gode resultater.

5.2.3 *Høydekurvens residualspredning.*

Av de forskjellige funksjonstypene som er foreslått, synes ingen å ha blitt alminnelig anerkjent som den „beste". Dette er forsåvidt rimelig. Høydekurven angir ikke en funksjonell, men en statistisk sammenheng mellom to variable. Denne sammenhengen kan variere atskillig fra populasjon til populasjon.

NÄSLUND (1929) brukte annengradsfunksjonen (formel 5.2.1–2) som uttrykk for høydekurven. Det ble foretatt numerisk utjevning på materiale fra en rekke flater, dels forsøksfelter, dels i vanlige bestand. For gran varierte den gjennomsnittlige residualspredningen for forsøksfelter mellom 0,95 m og 1,43 m, for bestand mellom 1,32 m og 1,69 m. Forskjellen mellom forsøksfelter og bestand kan til en viss grad skyldes forskjeller i

målingsmetodikk. På forsøksfeltene ble trehøydene målt med teodolitt, i bestandene med Christens høydemåler.

Assmann (1943) benyttet også annengradsfunksjonen ved numerisk utjevning av høydekurvene for en rekke granbestand. Residualspredningene varierte fra 0,68 til 1,23 m.

Det synes ikke å være noen klar sammenheng mellom residualspredningens størrelse på de forskjellige diametertrinn og diameteren. Näslund (l.c.) fant at spredningen stort sett holdt seg konstant med diameteren, for diametre over 8–9 cm. Assmann (l.c.) undersøkte ett tilfelle nærmere og fant en tydelig tendens til avtagende residualspredning med økende diameter. Langsæter (1930) fant i noen tilfelle omtrent konstant spredning, for diametre over ca. 10 cm, i andre tilfelle varierte spredningen endel.

På det foreliggende materiale (de 42 flatene) ble foretatt numerisk utjevning etter minste kvadraters metode ved formlene

$$h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2 \qquad (5.2.1\text{–}2)$$

og

$$h = b_1 + b_2 \log d. \qquad (5.2.1\text{–}7)$$

Regresjonskoeffisientene og residualspredningene framgår av tabell 5.1. Residualspredningene er satt i prosent av h_g. Stort sett synes annengradsfunksjonen å gi best utjevning. Dette er forsåvidt rimelig, fordi materialet tildels omfatter felter med meget stor diameterspredning. En funksjon som bare inneholder to parametre (formel 5.2.1–7) vil være for „stiv" til å dekke de forskjellige kurveforløpene.

Residualspredningene synes å være større enn de verdiene som Näslund (l.c.) og Assmann (l.c.) oppgir. For 7 av 42 flater er f. eks. residualspredningen større enn Näslund's største verdi (1,7 m). Grunnen til de store residualspredningene er vesentlig at flatene er sterkt „unormale". Det står igjen mange trær som avviker fra gjennomsnittet i forholdet mellom diameter og høyde. Ved vanlige tynningshogster ville disse trærne ha vært tatt ut i større utstrekning. Det spiller også en viss rolle at høydemålingene er beheftet med en viss målefeil, som antakelig er av størrelsesorden 0,5 m (sml. Skadsheim 1953).

5.2.4 *Høydekurvens tilfeldige feil.*

Den tilfeldige feilen for høydekurven avhenger for en stor del av hvilken funksjonstype som brukes ved den numeriske utjevningen. Da annengradsfunksjonen har vært meget brukt, og den også i det foreliggende

Tabell 5.1. Resultat av utjevning av høydene ved formlene: $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$, eller $h = b_1 + b_2 \log d$. (h er uttrykt i meter, d i centimeter)

Results of smoothing of the heights by the formulae; $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$, *or* $h = b_1 + b_2 \log d$. *(h is expressed in meters, d in centimeters)*

Flate nr. *Plot No.*	$h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$					$h = b_1 + b_2 \log d$			
	b_1	b_2	b_3	s		b_1	b_2	s	
				m	%			*m*	%
1	− 0,89	+ 1,14	− 0,015	1,3	7,6	− 8,65	18,86	1,6	9,3
2	− 1,65	+ 1,45	− 0,023	1,2	6,8	− 8,66	20,16	1,2	6,8
3	− 0,93	+ 1,20	− 0,015	1,1	5,7	− 10,33	20,60	1,4	7,3
4	+ 1,03	+ 0,84	− 0,0095	0,8	11,8	− 2,82	11,41	0,9	13,2
5	+ 0,81	+ 1,11	− 0,021	1,2	13,7	− 3,24	13,17	1,2	13,7
6	− 2,13	+ 1,34	− 0,020	1,2	7,6	− 11,18	21,23	1,4	8,9
7	− 0,72	+ 1,19	− 0,020	1,1	10,5	− 5,84	15,45	1,2	11,4
8	− 2,46	+ 1,28	− 0,013	2,4	11,2	− 13,82	25,45	2,9	13,6
9	− 1,00	+ 1,41	− 0,018	1,6	6,5	− 5,89	20,61	1,6	6,5
10	+ 3,87	+ 0,97	− 0,011	1,9	8,8	− 10,75	22,69	1,7	7,9
11	+ 2,36	+ 1,08	− 0,013	1,5	7,3	− 14,76	25,89	1,4	6,8
12	+ 3,28	+ 1,13	− 0,016	1,3	6,3	− 9,10	21,97	1,2	5,9
13	− 2,04	+ 1,51	− 0,024	1,6	11,0	− 10,16	21,57	1,8	12,3
14	− 2,08	+ 1,61	− 0,025	1,6	7,3	− 10,66	23,25	1,8	8,2
15	− 1,22	+ 1,38	− 0,025	1,1	8,7	− 7,11	17,66	1,2	9,4
16	− 0,35	+ 0,81	− 0,0064	1,0	11,0	− 7,64	15,88	1,4	15,3
17	+ 0,01	+ 0,81	− 0,0059	1,1	10,9	− 8,01	16,96	1,7	16,8
18	+ 1,18	+ 0,65	− 0,0014	1,5	13,8	− 7,21	16,31	2,3	21,1
19	− 1,33	+ 1,10	− 0,012	1,1	8,0	− 10,52	20,49	2,0	14,4
20	+ 1,00	+ 0,73	− 0,0079	1,4	14,0	− 5,18	13,48	1,4	14,0
21	+ 0,37	+ 1,19	− 0,014	2,2	11,4	− 10,03	22,12	2,4	12,4
22	− 0,81	+ 1,23	− 0,016	1,8	10,1	− 8,66	19,70	2,1	11,8
23	+ 0,93	+ 1,03	− 0,012	1,7	10,0	− 6,92	18,26	2,0	11,8
24	+ 2,46	+ 0,94	− 0,015	1,8	14,1	− 2,19	13,20	1,9	14,8
25	− 0,09	+ 1,19	− 0,015	2,1	11,3	− 8,93	20,60	2,3	12,4
26	− 1,60	+ 1,07	− 0,014	1,2	9,9	− 9,10	17,90	1,6	13,2
27	+ 0,69	+ 0,98	− 0,012	1,0	6,1	− 13,37	22,30	1,2	7,3
28	+ 0,58	+ 0,74	− 0,0055	1,2	11,0	− 11,53	18,91	1,2	11,0
29	− 2,61	+ 1,24	− 0,017	1,6	10,8	− 12,11	21,14	1,7	11,5
30	− 2,33	+ 1,45	− 0,021	1,7	8,4	− 11,93	23,16	1,7	8,4
31	− 1,94	+ 1,30	− 0,016	1,6	8,4	− 11,58	22,53	2,0	10,5
32	− 3,88	+ 1,43	− 0,019	1,5	7,7	− 15,42	25,27	1,6	8,2
33	+ 0,70	+ 0,90	− 0,013	1,4	17,1	− 4,64	13,35	1,4	17,1
34	+ 0,09	+ 1,14	− 0,019	1,5	13,2	− 6,41	16,18	1,4	12,3
35	+ 0,09	+ 1,07	− 0,015	1,4	12,3	− 7,25	17,04	1,3	11,4
36	− 0,36	+ 0,92	− 0,010	1,1	8,1	− 9,92	18,44	1,2	8,9
37	− 2,19	+ 1,08	− 0,011	1,2	6,8	− 16,30	24,88	1,3	7,4
38	− 0,61	+ 0,92	− 0,0072	1,4	11,9	− 11,09	20,20	1,7	14,4
39	+ 0,53	+ 0,79	− 0,0078	1,1	10,9	− 6,53	15,16	1,4	13,9
40	+ 0,64	+ 0,88	− 0,0097	1,2	12,0	− 5,72	14,98	1,4	14,0
41	+ 0,02	+ 0,66	− 0,0010	2,4	12,6	− 18,53	26,04	3,2	16,8
42	+ 1,85	+ 0,74	− 0,0099	1,0	12,2	− 1,94	10,64	1,1	13,4

tilfelle har gitt gode resultater, er høydekurven basert på denne funksjonstypen.

Forutsettes at den „sanne" høydekurven har formen

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 d_i + \beta_3 d_i^2 \tag{5.2.4–1}$$

mens den observerte høydekurven er

$$\hat{h}_i = b_1 + b_2 d_i + b_3 d_i^2 \tag{5.2.4–2}$$

følger at feilvariansen for høydekurven ved diameter d_i er

$$\sigma^2(\hat{h}_i) = E\left\{[(b_1 - \beta_1) + (b_2 - \beta_2)\, d_i + (b_3 - \beta_3)\, d_i^2]^2.\right\} \tag{5.2.4–3}$$

Utvikles parentesen på høyre side, idet en erstatter $E\,[(b_1 - \beta_1)^2]$ med $\sigma^2(b_1)$ osv., og $E\,[(b_1 - \beta_1)\,(b_2 - \beta_2)]$ med $\mathrm{cov}\,(b_1\, b_2)$ osv., kan formel (5.2.4–3) skrives

$$\sigma^2(\hat{h}_i) = \sum_{k=1}^{3} \sigma^2(b_k)\, d_i^{2(k-1)} + \sum_{k \neq l}^{3} \mathrm{cov}(b_k b_l)\, d_i^{k+l-2}. \tag{5.2.4–4}$$

Variansen for høydekurven kan altså uttrykkes ved variansene og kovariansene for regresjonskoeffisientene.

Regresjonskoeffisientene b_1, b_2 og b_3 finnes ved løsning av likningssystemet

$$\left.\begin{aligned} b_1\, n + b_2\, Sd + b_3\, Sd^2 &= Sh \\ b_1\, Sd + b_2\, Sd^2 + b_3\, Sd^3 &= S(hd) \\ b_1\, Sd^2 + b_2\, Sd^3 + b_3\, Sd^4 &= S(hd^2). \end{aligned}\right\} \tag{5.2.4–5}$$

For b_1 har en f. eks. at

$$b_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Sh & Sd & Sd^2 \\ S(hd) & Sd^2 & Sd^3 \\ S(hd^2) & Sd^3 & Sd^4 \end{vmatrix} \tag{5.2.4–6}$$

hvor

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & Sd & Sd^2 \\ Sd & Sd^2 & Sd^3 \\ Sd^2 & Sd^3 & Sd^4 \end{vmatrix}. \tag{5.2.4–7}$$

Formel (5.2.4–6) kan omformes:

$$b_1 = \frac{1}{\Delta}\left[Sh\cdot\begin{vmatrix} Sd^2 & Sd^3 \\ Sd^3 & Sd^4 \end{vmatrix} - S(hd)\cdot\begin{vmatrix} Sd & Sd^2 \\ Sd^3 & Sd^4 \end{vmatrix} + S(hd^2)\cdot\begin{vmatrix} Sd & Sd^2 \\ Sd^2 & Sd^3 \end{vmatrix}\right]. \qquad (5.2.4\text{–}8)$$

Dette kan også skrives

$$b_1 = c_{11}\,Sh + c_{12}\,S(hd) + c_{13}\,S(hd^2) \qquad (5.2.4\text{–}9)$$

hvor

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} Sd^2 & Sd^3 \\ Sd^3 & Sd^4 \end{vmatrix}$$

osv. I sin alminnelighet er

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} n & Sd & Sd^2 \\ Sd & Sd^2 & Sd^3 \\ Sd^2 & Sd^3 & Sd^4 \end{Vmatrix}^{-1}. \qquad (5.2.4\text{–}10)$$

Av formel (5.2.4–9) følger at

$$\sigma^2(b_1) = \sigma^2(h) \sum_{k,l=1}^{3} c_{1k}\,c_{1l}\,S(d^{k+l-2}) \qquad (5.2.4\text{–}11)$$

hvor $\sigma^2(h)$ er residualvariansen for høydekurven. Men nå er

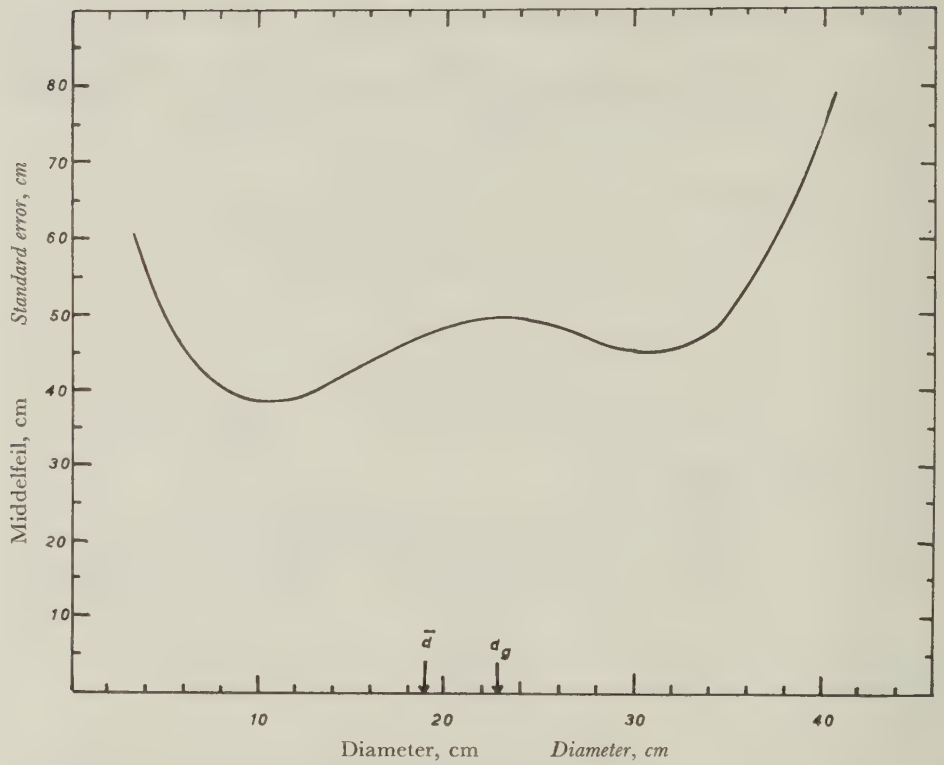
$$\left.\begin{aligned} c_{11}\,n + c_{12}\,Sd + c_{13}\,Sd^2 &= 1 \\ c_{11}\,Sd + c_{12}\,Sd^2 + c_{13}\,Sd^3 &= 0 \\ c_{11}\,Sd^2 + c_{12}\,Sd^3 + c_{13}\,Sd^4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.4\text{–}12)$$

Det vil si at

$$\sigma^2(b_1) = c_{11}\,\sigma^2(h). \qquad (5.2.4\text{–}13)$$

Denne utviklingen kan gjennomføres på samme måte for de andre variansene og for kovariansene, og en finner at

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2(b_2) &= c_{22}\,\sigma^2(h) \\ \sigma^2(b_3) &= c_{33}\,\sigma^2(h) \\ \operatorname{cov}(b_1 b_2) &= c_{12}\,\sigma^2(h) \\ \operatorname{cov}(b_1 b_3) &= c_{13}\,\sigma^2(h) \\ \operatorname{cov}(b_2 b_3) &= c_{23}\,\sigma^2(h). \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.4\text{–}14)$$



Figur 5.3. Middelfeil for høydekurven (flate nr. 1) ved 20 prøvetrær tilfeldig fordelt.
Figure 5.3. Standard error of the height curve (sample plot No. 1) determined by 20 sample trees chosen at random.

Settes det hele inn i formel (5.2.4–4), går denne formelen over til

$$\sigma^2(\hat{h}_i) = \sigma^2(h) \sum_{k,l=1}^{3} c_{kl} d_i^{k+l-2}. \qquad (5.2.4\text{–}15)$$

Da residualvariansen, $\sigma^2(h)$, som regel ikke er kjent, må den erstattes med sitt estimat, $s^2(h)$. Feilvariansen for høydekurven estimeres derfor ved formelen

$$V(\hat{h}_i) = s^2(h) \sum_{k,l}^{3} c_{kl} d_i^{k+l-2} \qquad (5.2.4\text{–}16)$$

(sml. Näslund 1929, Anderson og Bancroft 1952). I figur 5.3 er vist et eksempel på hvordan middelfeilen er for flate nr. 1.

Middelfeilen for høydekurven viser et ganske karakteristisk forløp: For små diametre er den ganske høy. Med økende diameter synker den inntil en diameter i nærheten av aritmetisk middeldiameter. Deretter stiger den noe for som regel å nå et midlertidig maksimum i nærheten av grunnflatemiddeldiameteren. Ved ytterligere økning avtar middelfeilen i noen tilfelle svakt, når et midlertidig minimum for deretter å øke raskt. (Dette forløpet gjelder for annengradsfunksjonen, men derimot ikke for alle de andre funksjonstypene.)

Prøvetrefordelingen spiller en viss rolle for hvordan middelfeilen variererer med diameteren. Hvis tyngden av prøvetrærne forskyves oppover mot høyere diametre, vil middelfeilens minimum også forskyves oppover. Til gjengjeld øker middelfeilen for de mindre dimensjonene. Virkningen av en endring i fordelingen er forholdsvis liten i de sentrale delene (se f. eks. NÄSLUND 1929).

NÄSLUND (l. c.) angir at middelfeilen for høydekurven ved en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren, kan skrives

$$s(h_g) = k \frac{s(h)}{\sqrt{n}}. \qquad (5.2.4\text{–}17)$$

Verdien av k empirisk bestemt på en rekke felter varierte mellom 1,28 og 1,39 (for gran).

Det byr på atskillig regnearbeid å bestemme den teoretiske verdien av k når den skal gjelde for en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren. Middelfeilen for høydekurven ved aritmetisk middeldiameter kan imidlertid uttrykkes på samme måte:

$$s(h_d) = k' \frac{s(h)}{\sqrt{n}} \qquad (5.2.4\text{–}18)$$

og i dette tilfelle er det relativt enkelt å uttrykke verdien av k' ved momentene for prøvetrærnes diametre. Utvikles nemlig formel (5.2.4–16) ved at d_i erstattes med $\bar{d}$, får en at

$$s(h_d) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_2^3}{m_2 m_4 - m_3^2}}} \cdot \frac{s(h)}{\sqrt{n}} \qquad (5.2.4\text{–}19)$$

hvor m_2, m_3 og m_4 er annet, tredje og fjerde moment for prøvetrærnes diametre. Det vil si at

$$k' = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_2^3}{m_2 m_4 - m_3^2}}} \qquad (5.2.4\text{–}20)$$

Det framgår av formel (5.2.4–20) at verdien av k' bare er avhengig av prøvetrefordelingen. Hvis fordelingen er normal, er $m_3 = 0$. Videre er da $m_4 = 3m_2^2$. Det vil si at variansen for høydekurven ved aritmetisk middeldiameter er

$$V(h_{\bar{d}}) = 1{,}5\,\frac{s^2(h)}{n} \qquad (5.2.4\text{–}21)$$

slik at middelfeilen er

$$s(h_{\bar{d}}) = 1{,}22\,\frac{s(h)}{\sqrt{n}}. \qquad (5.2.4\text{–}22)$$

Middelfeilen for en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren, vil som regel være noe større enn for aritmetisk middeldiameter. Likeledes vil kombinasjonene av m_2, m_3 og m_4 oftest være slik at verdien av k blir større enn 1,22. NÄSLUND (l.c.) har funnet at k i gjennomsnitt er 1,35.

Tabell 5.2. Middelfeil for h_g, 20 prøvetrær.
Standard error of h_g, 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*		Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*	
	m	%		*m*	%
1	0,50	2,9	22	0,66	3,7
2	0,40	2,3	23	0,76	4,5
3	0,40	2,1	24	0,52	4,1
4	0,24	3,5	25	0,71	3,8
5	0,37	4,3	26	0,43	3,6
6	0,38	2,4	27	0,28	1,7
7	0,32	3,0	28	0,36	3,3
8	0,86	4,0	29	0,45	3,0
9	0,49	2,0	30	0,48	2,4
10	0,55	2,6	31	0,46	2,4
11	0,42	2,0	32	0,41	2,1
12	0,37	1,8	33	0,40	4,9
13	0,50	3,4	34	0,45	3,9
14	0,46	2,1	35	0,50	4,4
15	0,34	2,7	36	0,32	2,4
16	0,34	3,7	37	0,41	2,3
17	0,45	4,5	38	0,59	5,0
18	0,54	5,0	39	0,39	3,9
19	0,42	3,0	40	0,42	4,2
20	0,52	5,2	41	0,73	3,9
21	0,68	3,5	42	0,31	3,8

I tabell 5.2 er gjengitt middelfeilene for høydekurvene ved en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren, for de 42 flatene. Hvis høydekurvene blir bestemt ved en „hurtigmetode", vil middelfeilene bli noe større. Nøyaktigheten av disse metodene er imidlertid ikke undersøkt nærmere.

5.2.5 *Systematiske og tilfeldige feil ved kuberingen.*

Ved grafisk utjevning av høydekurven kan innføres systematiske feil på grunn av det skjønnsmessige momentet ved utjevningen. Det er vanskelig å presisere nærmere hvilken størrelsesorden denne feilen kan ha, fordi den avhenger så meget av den personen som foretar utjevningen.

Ved numerisk utjevning av høydekurven etter minste kvadraters metode elimineres „personfeilen" i det vesentlige. En viss feil kan oppstå på grunn av uheldig valg av funksjonstype for høydekurven. Denne feilen vil bli ubetydelig hvis det blir foretatt kontroll på brukbarheten av den valte funksjonstypen.

Utjevningen av høydekurven etter minste kvadraters metode skjer i prinsippet på den måten at summen av de kvadratiske avvikelsene fra høydekurven blir minst mulig. Videre blir summen av de beregnete høydene for prøvetrærne lik summen av de observerte høydene. (Er det foretatt transformasjoner slik som ved formel (5.2.1–11), bestemmes høydekurven slik at de kvadratiske avvikelsene for de transformerte verdiene blir minst mulig.) På grunn av dette forholdet er det ikke på forhånd gitt at den samlete kubikkmassen blir bestemt uten forventningsskjevhet (sml. Popovic 1956). Hvis den funksjonstypen som brukes gir god tilpasning for hele forløpet, vil forventningsskjevheten bli minimal. Men hvis det er en tendens til at den beregnete høydekurven ligger for høyt eller for lavt i visse områder, opptrer forventningsskjevhet.

Stoffels og van Soest (1953) foretok en nærmere undersøkelse av høydekurvene

$$h = b_1 \frac{1}{g} + b_2 \qquad (5.2.1\text{–}1)$$

$$h = \frac{d^2}{(b_1 + b_2 d)^2} + 1{,}3 \qquad (5.2.1\text{–}3)$$

$$h = b_1 d^{b_2} \qquad (5.2.1\text{–}6)$$

$$h = b_1 + b_2 \log d \qquad (5.2.1\text{–}7)$$

samt grafisk utjevning. Materialet besto av 5 felter i japansk lerk og 1 felt i Douglasgran. Brukbarheten av de forskjellige formlene ble vurdert ved hjelp av „sylindervolumet" (= produktsummen av grunnflate og høyde). Høydene ble bestemt ved høydekurvene. Forskjellen mellom de beregnete og de virkelige sylindervolumene var i alle tilfelle små (mindre enn 0,5%).

For de 42 flatene ble kubikkmassen beregnet etter høydekurve (annengradsfunksjonen), sammenliknet med den virkelige. For en flate var forskjellen 1,2%. Kubikkmassen på denne flaten var liten (63 m³/ha) og residualspredningen for høyden stor. For de øvrige flatene var forskjellen mellom de to kubikkmassene alltid mindre enn 1,0%. Det er derfor tydelig at annengradsfunksjonen gir god tilpasning. STOFFELS og VAN SOEST's undersøkelser viser at det samme er tilfelle med noen andre høydekurver. Som regel kan en derfor se bort fra den systematiske feilen ved denne kuberingsmåten.

Den tilfeldige feilen for kubikkmassen må beregnes med utgangspunkt i feilen for høydekurvens regresjonskoeffisienter. En feil i høydekurvens forløp forplanter seg videre til kubikkmassen.

I sin alminnelighet kan kubikkmassen ifølge høydekurven skrives som en funksjon av diameteren og høydekurvens koeffisienter: $v = f(d;\ b_1,\ b_2,\ b_3)$, idet høydekurven skrives: $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$. Hvis kubikktallene som brukes bare foreligger i form av en tabell (f. eks. Eides kubikktabell for gran med bark), er ikke selve funksjonen kjent. Funksjonsverdiene må bestemmes en for en, med utgangspunkt i kubikktabellen.

Den samlete kubikkmassen (V) kan skrives:

$V = \sum^{N} f(d;\ b_1,\ b_2,\ b_3)$. Hvis koeffisientene er feilfrie, vil den samlete kubikkmassen bli bestemt uten feil. En liten feil (Δb) i en av koeffisientene for høydekurven medfører en feil lik $\Delta V = \Sigma(\partial f/\partial b \cdot \Delta b)$ i den samlete kubikkmassen. Som regel vil alle koeffisientene være beheftet med feil. Den samlete feilen i kubikkmassen er

$$\Delta V = \sum^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial b_1}\Delta b_1 + \frac{\partial f}{\partial b_2}\Delta b_2 + \frac{\partial f}{\partial b_3}\Delta b_3\right] \qquad (5.2.5\text{–}1)$$

slik at variansen for kubikkmassen er

$$\sigma^2(V) = \sum_{k,l}^{3}\left(\sum^{N}\frac{\partial f}{\partial b_k}\right)^2\sigma^2(b_k) + \sum_{k\neq l}^{3}\left(\sum^{N}\frac{\partial f}{\partial b_k}\right)\left(\sum^{N}\frac{\partial f}{\partial b_l}\right)\mathrm{cov}\,(b_k b_l). \qquad (5.2.5\text{–}2)$$

Variansene og kovariansene for regresjonskoeffisientene kan uttrykkes ved residualvariansen for høydekurven og c'ene (se formel 5.2.4–14). Formel (5.2.5–2) kan derfor skrives:

$$\sigma^2(V) = \sum_{k,l}^{3} \left(\sum^{N} \frac{\partial f}{\partial b_k} \right) \left(\sum^{N} \frac{\partial f}{\partial b_l} \right) c_{kl}\, \sigma^2(h). \qquad (5.2.5–3)$$

Denne formelen kan ikke brukes direkte fordi den „sanne" residualvariansen for høydekurven, $\sigma^2(h)$, ikke er kjent. Den må erstattes med sitt estimat, $s^2(h)$. Hvis det brukes en kubikktabell som ikke samtidig foreligger i form av en funksjon, kan ikke $\partial f/\partial b$ finnes direkte. Istedenfor må brukes tilnærmete verdier, funnet ved differenser. For $\partial f/\partial b_1$, settes f. eks.

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} \doteq \frac{f(d; b_1 + \Delta b_1, b_2, b_3) - f(d; b_1, b_2, b_3)}{\Delta b_1}. \qquad (5.2.5–4)$$

Når feilen for kubikkmassen må bestemmes ved hjelp av slike tilnærmete uttrykk, er ikke formel (5.2.5–3) særlig velegnet. På grunn av den sterke korrelasjonen mellom feilene på regresjonskoeffisientene, vil en liten endring i verdien $\Sigma(\partial f/\partial b)$ få stor virkning på det samlete uttrykket. For å unngå dette er det en fordel å uttrykke høydekurven ved ortogonale polynomer:

$$h_i = \bar{h} + b'_1 \cdot P_1(d_i) + b'_2 \cdot P_2(d_i) \qquad (5.2.5–5)$$

hvor $P_1(d)$ er et førstegradspolynom og $P_2(d)$ er et annengradspolynom i diameteren. Polynomene har egenskapene

$$\begin{aligned} SP_1(d) &= SP_2(d) = 0 \\ S\,[P_1(d) \cdot P_2(d)] &= 0. \end{aligned} \qquad (5.2.5–6)$$

Koeffisientene i polynomene finnes ganske enkelt når regnearbeidet innrettes med dette for øye (se f. eks. Woolf 1951, Wishart og Metakides 1953).

Feilvariansen for høydekurven kan uttrykkes som summen av tre ledd:

$$\sigma^2(\hat{h}_i) = \frac{\sigma^2(h)}{n} + P_1^2(d_i) \cdot \sigma^2(b'_1) + P_2^2(d_i) \cdot \sigma^2(b'_2). \qquad (5.2.5–7)$$

Variansene for regresjonskoeffisientene er

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2(b_1') &= \frac{\sigma^2(h)}{SP_1^2(d)} \\ \sigma^2(b_2') &= \frac{\sigma^2(h)}{SP_2^2(d).} \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.5\text{–}8)$$

Feilvariansen for den samlete kubikkmassen kan tilnærmet finnes ved uttrykket

$$V(V_{hk}) = \left(\sum^N \frac{\partial f}{\partial h}\right)^2 \frac{s^2(h)}{n} + \left(\sum^N \frac{\partial f}{\partial b_1'}\right)^2 V(b_1') + \left(\sum^N \frac{\partial f}{\partial b_2'}\right)^2 V(b_2'). \qquad (5.2.5\text{–}9)$$

Uttrykkene $\sum^N (\partial f/\partial b_1)$ osv. kan bestemmes ved differenser slik som angitt ved formel (5.2.5–4). Den framgangsmåten som er brukt, illustreres godt ved et eksempel:

Det er gitt tre dimensjoner: 10 cm, 20 cm og 30 cm.

Høydekurven er $h = d - 0{,}01d^2$.

Residualspredningen for høydekurven er 1 m. Hvis det tas uendelig mange sett prøvetrær fra denne populasjonen, med 3 trær i hvert sett (10 cm, 20 cm og 30 cm), vil variansene og kovariansene for hvert sett være gitt ved elementene i følgende matriks:

$$\left\| \begin{array}{rrr} 19 & -2{,}1 & 0{,}05 \\ -2{,}1 & 0{,}245 & -0{,}006 \\ 0{,}05 & -0{,}006 & 0{,}00015 \end{array} \right\|.$$

Virkningene av en feil på koeffisientene i høydekurven finnes ved differenser slik som angitt ved formel (5.2.5–4).

Δb_1 settes her lik 1 m, Δb_2 lik 0,01 og Δb_3 lik 0,001. Resultatene framgår av følgende tabell:

d	h	v	$h+1$	v	Δv	$h+0{,}01d$	Δv	$h+0{,}001d^2$	Δv
cm	*m*	dm^3	*m*	dm^3	dm^3	*m*	dm^3	*m*	dm^3
10	9	37	10	42	5	9,1	0,5	9,1	0,5
20	16	246	17	267	21	16,2	4,2	16,4	8,4
30	21	663	22	710	47	21,3	14,1	21,9	42,3
Sum					73		18,8		51,2

En feil på b_1 på 1 m har gitt en feil i den samlete kubikkmassen på 73 dm³. En feil på b_2 på 0,01 har gitt en feil i den samlete kubikkmassen på 18,8 dm³. Det vil si at en feil på b_2 lik 1, vil gi en feil i den samlete kubikkmassen på 1880 dm³. Tilsvarende finnes at en feil på b_3 lik 1 gir en feil i den samlete kubikkmassen på 51 200 dm³. Settes disse verdiene inn i formel (5.2.5–3), finnes feilvariansen for kubikkmassen 2675. Det vil si at feilen er 52 dm³.

Høydekurven kan også uttrykkes ved ortogonale polynomer: $h - \bar{h} = 0{,}6\,(d - \bar{d}) - 0{,}01\,[-\,40\,(d - \bar{d}) + (d^2 - d_g)]$. Virkningen av en feil på koeffisientene når høydekurven er skrevet på denne måten, finnes som ovenfor:

d	h	$P_1(d)$	$d^2 - dg$	$P_2(d)$	$h+0{,}01P_1(d)$	Δv	$h+0{,}001P_2(d)$	Δv
cm	m					dm³		dm³
10	9	− 10	− 366,7	+ 33,3	8,9	− 0,4	9,33	+ 1,7
20	16	0	− 66,7	− 66,7	16,0	0	− 15,33	− 14,7
30	21	+ 10	+ 433,3	+ 33,3	21,1	+ 4,7	21,33	+ 15,5
Sum						4,3		2,5

Settes disse verdiene inn i formel (5.2.5–9), finnes feilvariansen 2709 som svarer til en feil på kubikkmassen lik 52 dm³.

I dette eksemplet har de to beregningsmåtene gitt praktisk talt samme resultat. Men i andre tilfelle kan det bli ganske store forskjeller. Det beror på det forholdet at beregningsmåten bare er tilnærmet riktig. Hvis en f. eks. istedenfor å beregne feilen som skyldes b_3 (i høydekurven $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$) i positiv retning, hvorved en får 51,2 dm³, beregner feilen i negativ retning, får en verdien 46,1 dm³. Med denne beregningsmåten blir feilvariansen for kubikkmassen 6067, som svarer til en feil på 78 dm³. Dette skyldes den sterke korrelasjonen som er mellom koeffisientene når høydekurven skrives på formen: $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$. Ved å uttrykke høydekurven ved ortogonale polynomer unngår en noen av de feil som skyldes mindre uregelmessigheter i den kubikktabellen som brukes, og de „hopp" som skyldes at kubikktabellen har inngang bare for hver hele meter.

Middelfeilene for de forskjellige flatene er beregnet etter formel (5.2.5–9). For beregningen av uttrykkene $\Sigma(\partial f/\partial b)$ etter formel (5.2.5–4) ble Δh satt lik 0,1, $\Delta b_1'$ lik 0,05 og $\Delta b_2'$ lik 0,005. Høydene var uttrykt i meter, diametrene i centimeter. Middelfeilen for den samlete kubikkmassen ved bruk av 20 prøvetrær er gitt i tabell 5.3. Med 20 prøvetrær varierer middelfeilene fra 2,0 til 5,7 %, med en gjennomsnittlig verdi på

Tabell 5.3. Middelfeil på samlet kubikkmasse beregnet ved høydekurve, 20 prøvetrær.
Standard error of total volume estimated by means of height curve, 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*		Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*	
	m³/ha	%		m³/ha	%
1	4,9	2,9	22	9,7	4,1
2	5,8	2,3	23	4,8	3,8
3	4,2	2,4	24	9,0	5,2
4	2,4	4,5	25	11,6	4,1
5	6,8	4,2	26	3,1	3,6
6	6,1	3,0	27	1,7	2,2
7	4,5	4,0	28	2,4	3,2
8	10,3	3,6	29	3,3	3,5
9	7,8	2,0	30	5,2	2,8
10	11,9	2,9	31	6,9	3,1
11	6,5	2,3	32	4,2	2,3
12	7,0	2,3	33	3,6	5,7
13	7,1	4,4	34	7,8	5,1
14	6,7	2,2	35	5,7	5,2
15	5,0	2,7	36	3,4	3,1
16	2.0	3,7	37	3,0	2,2
17	2,8	3,8	38	2,3	4,1
18	2,9	4,6	39	3,5	3,7
19	4,0	2,7	40	3,0	4,1
20	5,2	4,8	41	7,0	3,8
21	12,9	4,3	42	2,0	3,7

3,5 %. For uregelmessige bestand må det derfor tas mer enn 20 prøvetrær hvis en vil være noenlunde sikker på at feilen på kubikkmassen skal være mindre enn 4 %.

Den beregnete middelfeilen gir bare tilnærmet et uttrykk for feilen ved tilfeldig prøvetrefordeling, idet den ikke inkluderer den feilen som skyldes at dimensjonsfordelingen for prøvetrærne kan bli litt annerledes enn for populasjonen.

Korsun (1948) har undersøkt spørsmålet om hvor mange prøvetrær som bør tas, på grunnlag av et 55-årig granbestand. Først ble alle trærne målt. Deretter ble det opprettet høydekurver (annengradsfunksjon) på grunnlag av 1 tre i hver diameterklasse, 2 trær i hver klasse osv. opp til 10 trær i hver diameterklasse. Kubikkmassen ble bestemt ved hjelp av høydekurvene. De beregnete verdiene ble deretter sammenliknet med de virkelige. Differensen mellom beregnet og virkelig kubikkmasse avtar stort sett med økende prøvetreantall. Korsun konkluderer med at det bør tas minst to prøvetrær i hver diameterklasse.

Som omtalt tidligere, synes middelfeilen stort sett å være omvendt proporsjonal med antall prøvetrær. Hvis en følger Korsun's råd, vil

prøvetreantallet bli sterkt avhengig av diameterspredningen i bestandet og vidden av diameterklassene. I bestand med stor spredning vil det kanskje være trær i 15 diameterklasser hvis vidden er 2 cm, men bare i 7–8 klasser hvis vidden er 4 cm. I første tilfelle burde det altså tas 30 prøvetrær mot 15 prøvetrær i siste tilfelle. Det er klart at den siste framgangsmåten ville gi et usikrere resultat.

Näslund (1929) har undersøkt forholdet mellom den prosentiske feilen for kubikkmassen og den prosentiske feilen for høydekurven ved en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren. I gjennomsnitt var sammenhengen:

$$s(V)_{\%} = 0{,}85\, s(h_g)_{\%}. \qquad (5.2.5\text{–}10)$$

Ved utledningen av feilen for kubikkmassen ble forutsatt at formtallet var bestemt uten feil. Denne forutsetningen vil imidlertid sjelden gjelde. Når kuberingen foretas ved høydekurve og kubikktabell, vil en positiv feil på høyden samtidig følges av en positiv feil på formtallet. Denne positive korrelasjonen gjør at feilen på kubikkmassen vil være større enn etter formel (5.2.5–10).

I figur 5.4 er inntegnet de prosentiske feilene for kubikkmassen og for høydekurven (ved grunnflatemiddeldiameteren). Feilen på kubikkmassen er omtrent like stor som feilen på høydekurven. Formel (5.2.5–10) gir med andre ord 10–15 prosent for lavt resultat.

5.3 *Kubering ved masselinje og dhf-linje.*

Det har lenge vært kjent at relasjonen mellom kubikkmasse og grunnflate for enkelttrærne er tilnærmet lineær sålenge en holder seg innen et bestand. Masselinjen kan skrives:

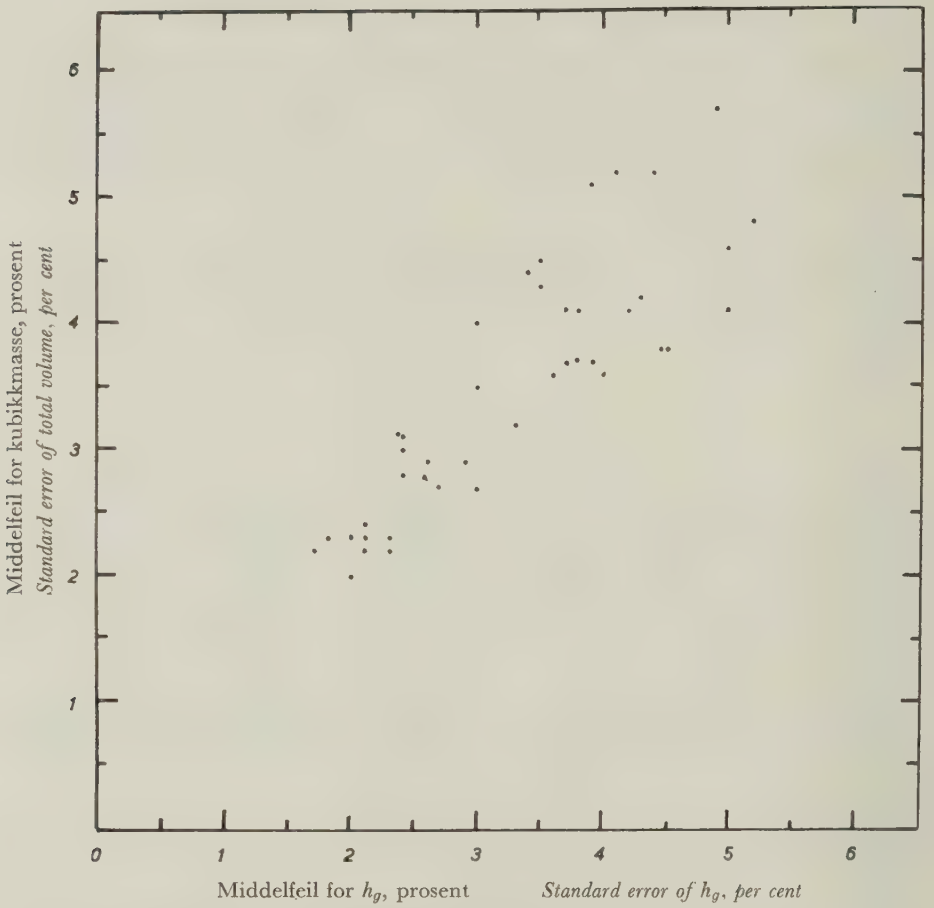
$$v = b_1 + b_2 g. \qquad (5.3\text{–}1)$$

Den samlete kubikkmassen kan derfor estimeres ved regresjonsestimatoren

$$V = Nb_1 + b_2 G \qquad (5.3\text{–}2)$$

når først regresjonskoeffisientene er bestemt.

Masselinjen bestemmes på grunnlag av prøvetrærne. Når kubikkmasse og grunnflate er kjente for hvert prøvetre, kan b_1 og b_2 finnes ved minste kvadraters metode. Hvis en mener at denne framgangsmåten er for arbeidskrevende, kan koeffisientene bestemmes ved enklere metoder, slik som nevnt i forrige avsnitt.



Figur 5.4. Middelfeil for kubikmasse og høydekurve.
Figure 5.4. Standard error of total volume and height curve.

Det er en fordel ved kubering etter masselinjen at prøvetrærne kan velges nokså fritt. En er f. eks. ikke bundet av at det skal være minst ett prøvetre i hver diameterklasse, slik som ved stratifisert utvalg.

Den stokastiske modellen som ligger til grunn for masselinjen er:

$$v_i = \beta_1 + \beta_2 g_i + \varepsilon_i \tag{5.3–3}$$

hvor β_1 og β_2 er parametre som svarer til de observerte verdiene b_1 og b_2 i formel (5.3–1). ε_i er en tilfeldig variabel med egenskapene $E(\varepsilon_i) = 0$ og $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2(v_i)$.

Hvis modellen (5.3–3) virkelig gjelder, og $\sigma^2(v_i)$ er konstant $= \sigma^2(v)$,

får en det beste estimatet på β_2 ved å bruke minste kvadraters metode uten vekter:

$$b_2 = \frac{S(v_i - \bar{v})(g_i - \bar{g})}{S(g_i - \bar{g})^2}. \qquad (5.3\text{–}4)$$

Varierer derimot $\sigma^2(v_i)$ med grunnflaten, får en det beste lineære estimatet på β_2 ved å bruke vekter. Vektene må være omvendt proporsjonale med $\sigma^2(v_i)$, (David og Neyman 1938, Hasel 1942).

Assmann (1936), Abadie (1956) og Hummel (1955, 1956) som har behandlet masselinjen inngående, har foretatt direkte estimering av koeffisientene β_1 og β_2 ved minste kvadraters metode uten bruk av vekter. Betydningen av å bruke vekter er understreket av Baker (1941).

Flere undersøkelser (f. eks. Näslund 1929, Langsæter 1930) har vist at enkelttrærnes variasjon omkring høydekurven er noenlunde konstant for forskjellige diametre. Det vil si at $\sigma(v_i)$ nødvendigvis må variere sterkt med grunnflaten. Strengt tatt burde det derfor brukes vekter hvis en ønsker å få de beste estimatene med et gitt prøvetrematerialе. Men det synes også å innebære visse faremomenter å innføre vekter i beregningen, fordi en da kan risikere systematiske feil av betydning, hvis sammenhengen mellom de to variable (kubikkmasse og grunnflate) i virkeligheten ikke er lineær.

Det viser seg erfaringsmessig at koeffisienten b_1 i masselinjen har negativ verdi. Da det videre må svare en kubikkmasse lik 0 til grunnflate 0, betyr dette at små dimensjoner blir underkubert etter masselinjen. I mange tilfelle ser det også ut til at sammenhengen mellom kubikkmasse og grunnflate er svakt krumlinjet også for større dimensjoner (Tischendorf 1933, Krenn 1944). Prodan (1951) angir at annengradsfunksjonen

$$v = b_1 + b_2 d + b_3 d^2 \qquad (5.3\text{–}5)$$

gjennomgående gir bedre utjevning enn masselinjen.

Brunn (1931) fant at sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter kunne gjengis med en annengradsfunksjon, hvor konstantleddet var sløyfet. Schaeffer (1949) konstruerte tariffer (som angir sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter) på dette grunnlaget. Det vil si at modellen

$$v_i = \beta_1' d_i + \beta_2' d_i^2 + \varepsilon_i' \qquad (5.3\text{–}6)$$

skulle være bedre enn modellen (5.3-3). Hvis modellen (5.3-6) gjelder,

får en det beste forventningsrette estimatet på den samlete kubikkmassen ved

$$V_{opt} = b'_{1\ opt} \sum^{N} d_i + b'_{2\ opt} \sum^{N} d_i^2 \tag{5.3–7}$$

hvor

$$\left.\begin{aligned} b'_{1\ opt} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S(wvd) & S(wd^3) \\ S(wvd^2) & S(wd^4) \end{vmatrix} \\ b'_{2\ opt} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S(wd^2) & S(wvd) \\ S(wd^3) & S(wvd^2) \end{vmatrix} \\ \Delta &= \begin{vmatrix} S(wd^2) & S(wd^3) \\ S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3–8}$$

Vekttallene, w_i, må være omvendt proporsjonale med $\sigma^2(v_i)$. Det er en betingelse for at estimatet skal være optimalt at en virkelig kjenner de sanne verdiene for residualspredningen. I de fleste tilfelle må en gjøre bestemte antakelser om sammenhengen mellom residualspredningen og den uavhengige variable. Ut fra denne sammenhengen bestemmes de vekttall som brukes. Estimatene vil da ikke lenger være optimale. Antas at $\sigma^2(v_i)$ er proporsjonal med d_i^2, går formlene over til

$$\left.\begin{aligned} b'_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} S(\frac{\pi}{4} dhf) & Sd \\ S(\frac{\pi}{4} d^2hf) & S(d^2) \end{vmatrix} \\ b'_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} n & S(\frac{\pi}{4} dhf) \\ Sd & S(\frac{\pi}{4} d^2hf) \end{vmatrix} \\ \Delta &= \begin{vmatrix} n & Sd \\ Sd & S(d^2) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3–9}$$

Disse verdiene for regresjonskoeffisientene er identiske med de verdiene en får ved direkte bestemmelse av koeffisientene i „*dhf*-linjen"

$$\frac{\pi}{4} dhf = b'_1 + b'_2 d. \tag{5.3–10}$$

Hvis den samlete kubikkmassen skal bestemmes ved hjelp av *dhf*-linjen, brukes en tabell over *dhf*-verdier. I tabell 5.4 er som eksempel gitt verdiene for Eides kubikktabell for gran med bark. På grunnlag av prøve-

Tabell 5.4. Tabell for $\frac{\pi}{4}$ dhf (dm^2), beregnet på grunnlag av Eides kubikktabell for gran (Eide 1923).

Table for $\frac{\pi}{4}$ dhf (sq.dm) computed on the basis of Eide's volume table for Norway spruce (Eide 1923).

Diameter cm	Høyde, meter *Height, meters*																					
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
6	15	17	20	22																		
7	17	20	23	26	30																	
8	20	23	25	29	33	38																
9	22	24	28	31	34	39	43	49	54	60	67	73										
10	24	26	30	33	37	42	48	53	59	64	70	77										
11		28	33	36	40	45	52	57	64	69	75	82										
12		30	35	39	43	48	55	61	67	74	81	87	95	103								
13			37	42	46	52	58	64	71	78	85	93	101	108								
14			39	44	49	54	60	66	74	82	90	98	106	114								
15			41	46	51	57	63	69	77	86	94	102	110	119	127	137						
16				49	53	59	66	73	81	89	98	106	116	124	133	143						
17				51	56	62	69	76	84	93	102	111	121	130	139	148						
18				53	59	65	72	79	87	96	106	115	125	135	144	154						
19				56	62	68	75	82	91	99	109	119	129	140	149	159	169	179				
20				58	65	71	78	85	94	103	112	123	134	145	155	165	175	186				
21					67	73	80	88	97	106	115	126	138	149	159	170	180	191				
22					70	76	83	91	100	109	119	129	141	152	163	175	186	197				
23					72	79	86	94	103	112	122	132	145	156	167	179	191	203	216			
24					74	82	89	97	105	115	125	135	148	159	171	183	196	208	221	233		
25					76	84	91	99	108	118	128	137	151	162	174	188	200	214	226	238		
26						87	94	102	111	120	132	141	154	166	178	192	205	218	231	243		
27						89	96	104	113	123	134	145	157	169	182	196	209	223	237	249		
28						92	99	107	116	126	138	149	161	173	186	200	213	228	242	255	271	
29						94	101	110	119	129	140	152	164	177	189	203	217	232	247	260	276	
30						96	104	112	121	132	143	155	167	180	193	207	221	237	251	265	281	297
31							106	115	124	135	146	158	170	183	196	211	225	241	255	270	285	301
32							108	117	127	138	149	161	173	186	200	215	229	245	259	274	290	305
33								119	129	140	151	163	176	189	203	218	234	249	264	278	294	310
34								121	132	143	154	165	178	192	207	222	238	253	268	283	299	314
35								124	135	145	156	167	181	195	210	225	242	257	272	287	304	319
36									137	147	158	169	183	198	213	229	246	261	276	292	309	324
37									140	148	160	172	186	200	216	232	249	265	281	297	314	329
38									142	149	161	174	188	203	219	235	253	269	285	302	318	334
39										150	163	176	190	205	221	238	256	273	289	306	323	340
40										151	164	178	192	208	223	242	259	276	294	311	329	346

trærnes *dhf*-verdier og diametre beregnes koeffisientene b_1' og b_2' etter formel (5.3–9). Den samlete kubikkmassen finnes etter formelen

$$V = b_1' \sum^{N} d + b_2' \sum^{N} d^2. \qquad (5.3\text{–}11)$$

5.3.1 *Systematiske feil.*

For en regresjonsestimator gjelder i sin alminnelighet at estimatene er frie for forventningsskjevhet, hvis den modellen som legges til grunn virkelig holder. Som regel må en imidlertid gå ut fra at modellen bare er å betrakte som en approksimasjon til den virkelige sammenhengen. En kan f. eks. tenke seg at sammenhengen mellom kubikkmasse og grunnflate er

$$v_i = \beta_1 + \beta_2 g_i + \Delta(g_i) + \varepsilon_i \qquad (5.3.1\text{-}1)$$

hvor $\Delta(g_i)$ er et ledd som gir uttrykk for de virkelige avvikelsene fra den masselinjen som er lagt til grunn (formel 5.3–3). Disse avvikelsene kan skyldes at sammenhengen ikke er lineær, men har karakteren av en funksjon av høyere orden. I så fall blir estimatene på β_1 og β_2 beheftet med feil, hvis de blir beregnet som om sammenhengen mellom kubikkmasse og grunnflate var lineær. Disse feilene har imidlertid liten betydning. Forventningsskjevheten på estimatet av den samlete kubikkmassen er vanligvis av størrelsesorden $1/n$, (Cochran 1953), og kan derfor neglisjeres.

Koeffisientene b_1' og b_2' i *dhf*-linjen bestemmes slik at summen av de beregnete *dhf*-verdiene blir lik summen av de virkelige *dhf*-verdiene. For at metoden skal gi forventningsrette estimater, må forventningsverdien for summen av de beregnete kubikkmassene stemme med forventningsverdien for summen av de virkelige kubikkmassene. En oppfatning av eventuelle systematiske feil kan en derfor få ved å sammenlikne de beregnete kubikkmassene med de virkelige. De 42 flatene ble kubert etter *dhf*-linjen. Differensen mellom beregnet og virkelig kubikkmasse var i alle tilfelle helt ubetydelig (mindre enn 0,2 m³/ha).

5.3.2 *Tilfeldige feil.*

Det er vanlig å estimere feilvariansen for den samlete kubikkmassen bestemt etter masselinjen, *som om den sanne residualvariansen var konstant* (se f. eks. Hummel 1955). Som nevnt må en imidlertid regne med at denne forutsetningen ikke holder i virkeligheten. Det er derfor av betydning å drøfte litt nærmere hvilke feil denne framgangsmåten kan medføre.

Når modell (5.3–3) virkelig gjelder, og β_2 estimeres ved formel (5.3-4), er den „sanne" feilvariansen

$$\sigma^2(b_2) = \frac{S\,(g_i - \bar{g})^2\,\sigma^2(v_i)}{[S\,(g_i - \bar{g})^2]^2} \quad . \tag{5.3.2–1}$$

Når en estimerer $\sigma^2(b_2)$ som om residualvariansen var konstant, skjer det ved formelen

$$V(b_2) = \frac{s^2(v)}{S\,(g_i - \bar{g})^2} \tag{5.3.2–2}$$

hvor $s^2(v)$ er den observerte residualvariansen for kubikkmassen. Forventningsskjevheten for $V(b_2)$ er derfor lik

$$E\,[V(b_2) - \sigma^2(b_2)] = \frac{1}{S\,(g_i - \bar{g})^2}\left[\sigma^2(v) - \frac{S\,(g_i - \bar{g})^2\,\sigma^2(v_i)}{S\,(g_i - \bar{g})^2}\right] \tag{5.3.2–3}$$

hvor $\sigma^2(v) = 1/n \cdot S\sigma^2(v_i)$. Det første leddet inne i parentesen er et aritmetisk gjennomsnitt, det andre leddet et veiet gjennomsnitt av residualvariansene. Forventningsskjevheten vil derfor avhenge av hvordan residualvariansene varierer med diameteren og prøvetrefordelingen. I ganske spesielle tilfelle vil den beregnete feilvariansen være fri for forventningsskjevhet. I alminnelighet gjelder at forventningsskjevheten er omvendt proporsjonal med prøvetreantallet.

Den sanne variansen for samlet kubikkmasse bestemt ved masselinjen er

$$\sigma^2(V_{ml}) = \frac{N^2\sigma^2(v)}{n} + \frac{N^2(\bar{g}_b - \bar{g}_p)^2\,S(g_i - \bar{g}_p)^2\,\sigma^2(v_i)}{[S(g_i - \bar{g}_p)^2]^2} \tag{5.3.2–4}$$

hvor $\sigma^2(v)$ er gjennomsnittlig residualvarians, $\bar{g}_b$ er gjennomsnittlig grunnflate pr. tre i bestandet, $\bar{g}_p$ er gjennomsnittlig grunnflate for prøvetrærne og $\sigma^2(v_i)$ er residualvariansen for masselinjen.

Når en estimerer feilvariansen som om residualvariansen var konstant, skjer det ved formelen

$$V(V_{ml}) = N^2 s^2(v)\left\{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{g}_b - \bar{g}_p)^2}{S(g_i - \bar{g}_p)^2}\right\}. \tag{5.3.2–5}$$

Relasjonen mellom $\sigma^2(v_i)$ og g_i er ikke kjent. For å se hvilken betydning det andre leddet i formel (5.3.2 -4) har, kan en gjøre bestemte antakelser om denne sammenhengen. Hvis f. eks. $\sigma^2(v_i) = \lambda g_i$, er

$$\frac{S(g_i - \bar{g}_p)^2 \sigma^2(v_i)}{S(g_i - \bar{g}_p)^2} = \lambda \left(\frac{m_3}{m_2} + \bar{g}_p\right) \qquad (5.3.2\text{–}6)$$

hvor m_2 og m_3 er annet og tredje moment for prøvetrærnes grunnflater om middeltallet. Foretas prøvetreutvalget tilfeldig, kan en med en viss approksimasjon sette at

$$\frac{(\bar{g}_v - \bar{g}_p)^2}{S(g_i - \bar{g}_p)^2} \doteqdot \frac{1}{n^2} \qquad (5.3.2\text{–}7)$$

slik at formel (5.3.2–4) i dette spesielle tilfelle går over til

$$\sigma^2(V_{ml}) = \frac{N^2 \sigma^2(v)}{n} + \frac{N^2}{n^2} \lambda \left(\frac{m_3}{m_2} + \bar{g}_p\right). \qquad (5.3.2\text{–}8)$$

Et eksempel vil vise hvor liten betydning det andre leddet har. Går en ut fra en diameterfordeling slik som en finner den på flate nr. 1, og regner med at $\sigma^2(v_i) = 2g_i$, blir feilvariansen for kubikkmassen

$$\sigma^2(V_{ml}) = \frac{500^2 \cdot 806}{n} + \frac{500^2 \cdot 2}{n^2}\left(397 + 403\right) \doteqdot \frac{500^2 \cdot 806}{n}\left(1 + \frac{2}{n}\right). \qquad (5.3.2\text{–}9)$$

Det er tydelig at det ikke spiller noen rolle om det andre leddet sløyfes, hvis antallet prøvetrær er større enn f. eks. 20. Uten å begå noen vesentlig feil kan altså feilvariansen for kubikkmassen estimeres ved uttrykket:

$$V(V_{ml}) = \frac{N^2 s^2(v)}{n} \qquad (5.3.2\text{–}10)$$

når prøvetrærne er tilfeldig fordelt.

Ifølge formel (5.3.2–4) er feilvariansen sammensatt av to komponenter: Den ene komponenten er den gjennomsnittlige residualvariansen. Den andre komponenten er bl. a. avhengig av differensen mellem prøvetrærnes gjennomsnittlige grunnflate pr. tre og den gjennomsnittlige grunnflate pr. tre i bestandet.

Hvis det brukes et tilfeldig prøvetreutvalg, er $\sigma^2(v) \doteqdot 1/N \cdot \sum^N \sigma^2(v_i)$. Forskyves prøvetreutvalget på den måten at de mindre dimensjonene blir overrepresentert, vil det føre med seg at den gjennomsnittlige residualvariansen avtar. Det synes gunstig å gå ganske langt i denne retning i og med at $\sigma^2(v)$ da vil bli ganske liten. Imidlertid må en regne med at det kan innføres ganske betydelige systematiske feil hvis prøvetreutvalget gjøres for ekstremt. Videre vil den andre komponenten spille større og større rolle jo større forskjeller det blir mellom bestandets og prøve-

trærnes gjennomsnittlige grunnflate. Spørsmålet henger nøye sammen med problemet „veiet" regresjon og vil bli diskutert mer utførlig i avsnitt 6.

Den modellen som ligger til grunn for kubering etter *dhf*-linjen, er

$$v_i = \beta_1' d_i + \beta_2' d_i^2 + \varepsilon_i. \tag{5.3.2–11}$$

Forskjellen mellom beregnet og virkelig kubikkmasse kan uttrykkes ved „feilen" på koeffisientene:

$$\Delta V = \sum^N d_i \cdot \Delta b_1' + \sum^N d_i^2 \cdot \Delta b_2'. \tag{5.3.2–12}$$

Variansen for b_1' er gitt ved

$$\sigma^2(b_1') = E \frac{\begin{vmatrix} S(w\varepsilon d) & S(wd^3) \\ S(w\varepsilon d^2) & S(wd^4) \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} S(wd^2) & S(wd^3) \\ S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix}^2}. \tag{5.3.2–13}$$

Dette uttrykket kan omformes til

$$\sigma^2(b_1') = \frac{1}{\Delta^2} \{(Sw\sigma^2)(Sd^2)^2 + (Sw\sigma^2 d^2)(Sd)^2 - 2(Sw\sigma^2 d)(Sd)(Sd^2)\} \tag{5.3.2–14}$$

hvor

$$\Delta = \begin{vmatrix} S(wd^2) & S(wd^3) \\ S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix}$$

og σ^2 her angir residualvariansen for kubikkmassen.
På liknende måte finnes variansen for b_2'

$$\sigma^2(b_2') = \frac{1}{\Delta^2} \{n^2(Sw\sigma^2 d^2) + (Sw\sigma^2)(Sd)^2 - 2(Sw\sigma^2 d)\, n\, (Sd)\} \tag{5.3.2–15}$$

og kovariansen for b_1' b_2'

$$\operatorname{cov}(b_1' b_2') = \frac{1}{\Delta^2} \{n(Sw\sigma^2 d)(Sd^2) - n(Sw\sigma^2 d^2)(Sd) - (Sw\sigma^2)(Sd^2)(Sd) + (Sw\sigma^2 d)(Sd)^2\}. \tag{5.3.2–16}$$

Feilvariansen for kubikkmassen er gitt ved

$$\sigma^2(V_{dhf}) = (\sum^N d_i)^2\, \sigma^2(b_1') + (\sum^N d_i^2)^2\, \sigma^2(b_2') + 2(\sum^N d_i)(\sum^N d_i^2) \operatorname{cov}(b_1' b_2'). \tag{5.3.2–17}$$

Settes inn fra formel (5.3.2–14), (5.3.2–15) og (5.3.2–16) går formel (5.3.2–17) over til

$$\sigma^2(V_{dhf}) = \frac{1}{A^2}\{(Sw\sigma^2)[(Sd^2)^2(\overset{N}{\Sigma} d)^2 - 2(Sd^2)(Sd)(\overset{N}{\Sigma} d)(\overset{N}{\Sigma} d^2) + (Sd)^2(\overset{N}{\Sigma} d^2)^2] + (Sw\sigma^2 d)[-2(Sd)(Sd^2)(\overset{N}{\Sigma} d)^2 + 2n(Sd^2)(\overset{N}{\Sigma} d)(\overset{N}{\Sigma} d^2) + 2(Sd)^2(\overset{N}{\Sigma} d)(\overset{N}{\Sigma} d^2) - 2n(Sd)(\overset{N}{\Sigma} d^2)^2] + (Sw\sigma^2 d^2)[(Sd)^2(\overset{N}{\Sigma} d)^2 - 2n(Sd)(\overset{N}{\Sigma} d)(\overset{N}{\Sigma} d^2) + n^2(\overset{N}{\Sigma} d^2)^2]\}. \quad (5.3.2\text{–}18)$$

For det tilfelle at $NSd = n\overset{N}{\Sigma} d$, $NSd^2 = n\overset{N}{\Sigma} d^2$ og $w_i \propto d_i^{-2}$, er

$$\sigma^2(V_{dhf}) = \frac{N^2}{n^2} Sw\sigma^2 d^2 = \frac{N^2}{n^2} S\sigma^2. \quad (5.3.2\text{–}19)$$

Feilvariansen for kubikkmassen, bestemt etter *dhf*-linjen, ble estimert ved formelen

$$V(V_{dhf}) = \frac{N^2}{n(n-2)}\{S(v_i - b_1' d_i - b_2' d_i^2)^2\} \quad (5.3.2\text{–}20)$$

idet koeffisientene b_1' og b_2' var de som ble funnet direkte ved *dhf*-linjen.

Det er en vesentlig forskjell mellom resultatene etter formel (5.3.2–20) og de resultatene en får ved å estimere feilvariansen ved uttrykket

$$V(V_w) = -\frac{\begin{vmatrix} S(wv^2) & S(wvd) & S(wvd^2) \\ S(wvd) & S(wd^2) & S(wd^3) \\ S(wvd^2) & S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O & \overset{N}{\Sigma} d & \overset{N}{\Sigma} d^2 \\ \overset{N}{\Sigma} d & S(wd^2) & S(wd^3) \\ \overset{N}{\Sigma} d^2 & S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix}}{(n-2)\begin{vmatrix} S(wd^2) & S(wd^3) \\ S(wd^3) & S(wd^4) \end{vmatrix}} \quad (5.3.2\text{–}21)$$

(sml. David og Neyman 1938, Baker 1941). Formel (5.3.2–21) kan omformes til

$$V(V_w) = \frac{s^2(dhf)}{n}(\overset{N}{\Sigma} d_i)^2 + \frac{s^2(dhf)}{S(d_i - \bar{d}_p)^2}[\overset{N}{\Sigma}(d_i^2 - d_i\bar{d}_p)]^2. \quad (5.3.2\text{–}22)$$

$s^2(dhf)$ angir her residualvariansen for *dhf*-linjen. Indeks p angir at middeltallet gjelder for prøvetrærne.

Tabell 5.5. Middelfeil på samlet kubikkmasse beregnet ved masselinje og dhf-linje, 20 prøvetrær.
Standard error of total volume estimated by volume-basal area line and "dhf-line", 20 sample trees.

Flate nr. *Plot-No.*	Masselinje *Volume-basal area line*		*dhf*-linje *dhf-line*	
	m³/ha	%	m³/ha	%
1	4,6	2,8	5,1	3,1
2	5,8	2,3	5,8	2,3
3	4,7	2,7	5,2	3,0
4	3,2	5,9	3,0	5,6
5	7,9	4,9	7,5	4,6
6	5,7	2,8	5,6	2,7
7	5,4	4,8	5,9	5,2
8	11,0	3,8	11,0	3,8
9	8,1	2,1	8,3	2,1
10	10,6	2,6	10,6	2,6
11	6,2	2,1	6,8	2,4
12	7,4	2,4	8,7	2,8
13	6,4	4,0	6,1	3,8
14	6,2	2,1	6,4	2,1
15	6,4	3,5	6,0	3,3
16	3,6	6,6	3,5	6,4
17	4,9	6,6	4,7	6,3
18	4,4	7,0	4,3	6,9
19	7,8	5,3	7,4	5,0
20	5,6	5,1	5,4	5,0
21	10,6	3,5	11,4	3,8
22	7,2	3,0	8,0	3,4
23	4,1	3,3	4,0	3,2
24	7,4	4,2	7,5	4,3
25	7,2	2,6	7,8	2,8
26	3,2	3,7	3,1	3,6
27	1,5	1,9	1,4	1,8
28	2,8	3,8	2,7	3,6
29	3,2	3,4	3,1	3,3
30	4,4	2,4	4,6	2,5
31	5,5	2,5	5,5	2,5
32	4,8	2,7	4,8	2,7
33	4,9	7,7	4,7	7,4
34	7,4	4,9	7,3	4,8
35	4,0	3,7	3,7	3,4
36	4,1	3,7	4,3	3,9
37	4,4	3,2	4,1	3,0
38	3,4	6,0	3,2	5,6
39	5,1	5,4	4,9	5,2
40	3,9	5,2	3,6	4,9
41	6,8	3,7	6,6	3,6
42	2,5	4,7	2,4	4,5

Ved utvikling av formel (5.3.2–21) er forutsatt at residualvariansen for *dhf*-linjen er konstant. Denne forutsetningen synes det imidlertid ikke realistisk å bygge på. En kan derfor *ikke* gå ut fra at forventningsverdien for uttrykket $\frac{1}{n}\ [(S\varepsilon)^2(\overset{N}{\Sigma d})^2]$ hvor ε er „feilene" for *dhf*-linjen, er lik $\frac{1}{n}\ [S\sigma^2(dhf)]\ [\Sigma d]^2$ som en regner med ved formel (5.3.2–22).

De beregnete middelfeilene for masselinjen (formel 5.3.2–10) og for *dhf*-linjen (formel 5.3.2–20) framgår av tabell 5.5. Middelfeilen er i gjennomsnitt 3,9 % for masselinjen og 3,9 % for *dhf*-linjen, ved bruk av 20 prøvetrær. Det er med andre ord ingen vesentlig forskjell mellom masselinjen og *dhf*-linjen (når feilene bestemmes etter formel 5.3.2–20). Formel (5.3.2–22) gir meget lavere resultater (i gjennomsnitt 2,9 %). Dette viser at denne formelen ikke er brukbar til estimering av variansen for kubikkmassen.

5.4 *Kubering ved tariff, brøkestimator med tilfeldig utvalg og sps-utvalg.*

En tariff kan defineres som en funksjon (eller i praksis en tabell) som viser sammenhengen mellom diameter og kubikkmasse. Da trehøydene for en bestemt diameter kan veksle meget fra bestand til bestand, er det gjerne utarbeidet flere tariffer i samme serie for å lette den praktiske bruken.

Kubering ved hjelp av tariffer synes å være en av de vanligste kuberingsmetodene i Mellom-Europa (se f. eks. Krutsch og Loetsch 1938, Krenn 1948, Schaeffer 1949, Loetsch 1952, Stoffels 1953, Klepac 1953, Emrovic 1953 b, Hummel 1955). De forskjellige tariffene er konstruert på empirisk eller teoretisk grunnlag. Schaeffer (l.c.) gikk f. eks. ut fra at sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter kan gjengis med en funksjon av typen $v \propto d(k - d)$ hvor k er konstant. Hummel (l.c.) brukte masselinjen, $v = b_1 + b_2 g$.

Landsskogtaksator Aa. Vigerust har konstruert en spesiell klave til bruk ved hurtig kubering. På klavearmen er etset inn tabellene for 3 tariffer for gran og 3 tariffer for furu. Hver tariff svarer til en bestemt „høydeklasse".

Når kuberingen skal foretas ved hjelp av tariff, er den vanlige framgangsmåten at en anslår skjønnsmessig hvilken tariff som passer best. Hummel (l.c.) anbefaler å kubere et passende antall prøvetrær og bestemme det gjennomsnittlige tariffnummeret på grunnlag av prøvetrærne. Ved kuberingen brukes den tariff som best svarer til dette nummeret. Hummel's tariffer har nummer etter den kubikkmassen (i hoppus fot over bark) som svarer til brysthøydeomkrets 12 tommer. Lethpere (1958) anbefaler

istedenfor å bestemme tariffnummeret på grunnlag av forholdet mellom prøvetrærnes samlete kubikkmasse og deres samlete grunnflate.

Det ser ut til å være et karakteristisk trekk at det er proporsjonalitet mellom de forskjellige tariffene innen et tariffsystem. Det vil si at en kan komme over fra en tariff til en annen ved å multiplisere alle kubikkmassene i den første tariffen med en bestemt faktor. I noen tilfelle gjelder denne proporsjonaliteten fullt ut (f. eks. Schaeffers tariffer, Vigerusts tariffer), i andre tilfelle er proporsjonaliteten ikke helt fullstendig (f. eks. Hummels tariffer).

Hvis det er proporsjonalitet mellom tariffene innen et system, er det strengt tatt ikke nødvendig å operere med mer enn én tariff. De andre tariffene bringer ingen supplerende informasjon utover det den ene gir. Når det likevel føres opp en rekke tariffer, er det for å gjøre kuberingsmåten enklere i bruk.

Det foreligger ingen tariff for norsk gran som gir kubikkmassene med bark (Vigerusts tall gjelder kubikkmasser uten bark). Men da barkprosenten ikke endrer seg vesentlig med diameteren så lenge en holder seg innen et bestand, kan Vigerusts tall brukes også til bestemmelse av kubikkmassen med bark (Vigerusts tariffer er gjengitt f. eks. hos Bækken 1932).

For mest mulig å eliminere systematiske feil er det fordelaktig å bestemme kubikkmassen ved å bruke brøkestimatorer (kuberingsmåter som bygger på brøkestimator er nevnt bl. a. av Müller 1923, Neubauer 1924 og 1932).

Den samlete kubikkmasse finnes ved oppklaving av alle trærne idet en bruker en bestemt tariff, f. eks. den som svarer til Vigerusts høydeklasse 1,0. På grunnlag av endel prøvetrær som er tilfeldig valt, bestemmes forholdet mellom den virkelige kubikkmassen for prøvetrærne og deres „tariffkubikkmasse". Derved fås et uttrykk for det gjennomsnittlige forholdet mellom virkelig kubikkmasse og tariffkubikkmasse. Dette forholdet brukes til å korrigere den samlete tariffkubikkmassen:

$$V_t = \frac{V_{pv}}{V_{pt}} T \qquad (5.4\text{–}1)$$

hvor V_t er estimatet på den samlete kubikkmassen, V_{pv} er samlet, virkelig kubikkmasse og V_{pt} er samlet tariffkubikkmasse for prøvetrærne. T er samlet tariffkubikkmasse for alle trær.

Prøvetrærne kan også velges ut ved *sps*-utvalg, idet tariffkubikkmassen brukes som mål på „størrelsen". Den samlete kubikkmassen estimeres da ved formelen

$$V_t = \frac{1}{n} S\left(\frac{v}{t}\right) T \qquad (5.4\text{–}2)$$

hvor v er virkelig kubikkmasse og t er tariffkubikkmasse for de enkelte prøvetrærne.

Hvis det brukes en serie tariffer (slik som Hummels tariffsystem), og det er proporsjonalitet mellom de enkelte tariffene innen serien, sier formel (5.4–2) at kuberingen skal foretas ved den tariffen som svarer til det gjennomsnittlige tariffnummeret. Dette er den framgangsmåten som ble foreslått av Hummel (1955), med den viktige forskjellen at det med formel (5.4–2) forutsettes at prøvetrærne velges ut med sannsynlighet proporsjonal med tariffkubikkmassen, mens Hummel forutsetter et mer tilfeldig utvalg.

5.4.1 *Systematiske og tilfeldige feil.*

Vigerusts tabell for høydeklasse 1 ble brukt som tariff. Da denne tabellen bare dekker diameterintervallet 8–40 cm, ble tariffkubikkmassen utenfor dette intervallet bestemt ved ekstrapolasjon.

Det er kjent at brøkestimatorer som regel gir forventningsskjeve estimater (se f. eks. Cochran 1953). Forventningsskjevheten er omvendt proporsjonal med prøvetreantallet og avtar derfor raskere enn middelfeilen med økende antall prøvetrær. For de prøvetreantall som er aktuelle, vil forventningsskjevheten som regel være liten i forhold til middelfeilen. Som eksempel kan nevnes at forventningsskjevheten for flate nr. 1 vil være ca. 2,9 m³/ha eller 1,7 %, ved bruk av 20 prøvetrær. Middelfeilen er derimot 4,0 m³/ha eller 2,4 %. Det er da forutsatt at det brukes tilfeldig prøvetrefordeling.

Ved kubering etter formel (5.4–1) kan feilvariansen for den samlete kubikkmassen estimeres ved formelen

$$V(V_t) \doteq \frac{N^2}{n\,(n-1)} S(v_i - \bar{r}t_i)^2. \qquad (5.4.1\text{–}1)$$

$\bar{r}$ er forholdet mellom samlet, virkelig kubikkmasse for prøvetrærne og samlet kubikkmasse etter tariffen.

Hvis prøvetrærne er valgt ut ved *sps*-utvalg, og kubikkmassen estimeres ved formel (5.4–2) er feilvariansen

$$V(V_{sps\text{–}t}) = \frac{T^2}{n\,(n-1)} S\,(r_i - \bar{r}')^2 \qquad (5.4.1\text{–}2)$$

hvor r_i er forholdet mellom virkelig kubikkmasse og tariffkubikkmasse for prøvetre i og $\bar{r}' = 1/n \cdot S(v/t)$.

Tabell 5.6. Middelfeil på samlet kubikkmasse beregnet ved tariff — brøkestimator og *sps*-utvalg (proporsjonalt med tariffkubikkmassen), 20 prøvetrær.
Standard error of total volume estimated by tariff — ratio estimator and sampling with probability proportional to tariff volume ("PPS"), 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*			
	Brøkestimator *Ratio estimator*		*Sps*-utvalg *PPS-sampling*	
	m³/ha	%	m³/ha	%
1	4,0	2,4	3,6	2,2
2	6,2	2,5	5,5	2,2
3	4,0	2,3	3,2	1,8
4	3,5	6,5	3,5	6,5
5	11,0	6,8	9,1	5,6
6	5,4	2,6	4,5	2,2
7	5,8	5,1	3,8	3,4
8	10,9	3,8	9,5	3,3
9	8,0	2,1	7,4	1,9
10	11,4	2,7	10,4	2,5
11	5,9	2,0	5,7	2,0
12	8,0	2,6	6,5	2,1
13	5,9	3,6	5,0	3,1
14	7,0	2,3	6,6	2,2
15	6,3	3,4	5,2	2,8
16	3,0	5,5	1,8	3,3
17	4,5	6,0	2,7	3,6
18	4,3	6,9	2,5	4,0
19	7,5	5,1	4,8	3,2
20	5,4	5,0	4,2	3,9
21	9,7	3,2	8,5	2,8
22	6,7	2,8	6,0	2,5
23	4,1	3,3	3,4	2,7
24	9,9	5,7	6,6	3,8
25	6,7	2,4	6,7	2,4
26	2,9	3,4	2,3	2,7
27	1,4	1,8	1,5	1,9
28	2,6	3,5	2,1	2,8
29	4,8	5,2	3,6	3,9
30	4,3	2,3	4,2	2,3
31	5,5	2,5	5,2	2,3
32	8,0	4,4	6,1	3,4
33	4,8	7,5	3,2	5,0
34	8,6	5,7	6,2	4,1
35	3,5	3,2	3,4	3,1
36	3,6	3,2	2,7	2,4
37	4,8	3,5	3,8	2,8
38	3,2	5,6	2,1	3,7
39	4,5	4,7	3,3	3,5
40	3,3	4,5	2,7	3,6
41	7,3	4,0	7,4	4,1
42	3,1	5,8	3,0	5,6

Middelfeilen for samlet kubikkmasse bestemt på de to måtene er gjengitt i tabell 5.6. For 20 prøvetrær er middelfeilen i gjennomsnitt 4,0 % for tilfeldig prøvetrefordeling (brøkestimator) og 3,2 % for *sps*-utvalg.

5.5 *Kubering ved stratifisert utvalg.*

Ved stratifisert utvalg må populasjonen inndeles i strata. I forbindelse med kubering er det naturlig å bruke diameteren som stratifiseringsgrunnlag. Strataene kan da dannes direkte ved de diameterklassene som brukes ved oppklavingen, eller ved å slå sammen to eller flere naboklasser til et stratum.

Den samlete kubikkmassen finnes ved formelen

$$V = \sum^{k} N_k \bar{v}_k \qquad (5.5\text{–}1)$$

hvor $\bar{v}_k$ er gjennomsnittlig kubikkmasse pr. tre og N_k er samlet treantall i stratum k. Summeringen er over strataene. $\bar{v}_k$ skal prinsipielt bestemmes som gjennomsnittlig kubikkmasse av de prøvetrærne som faller i stratum k. Det er derfor nødvendig med minst ett prøvetre for hvert stratum. I praksis byr det ofte på meget regnearbeid å bestemme $\bar{v}_k$ som middeltall av kubikkmassene for prøvetrærne i stratum k, idet dette innebærer at hvert prøvetre må kuberes for seg. Det er vanlig å bestemme $\bar{v}_k$ på grunnlag av gjennomsnittlig høyde og diameter for prøvetrærne. Derved innføres en systematisk feil som blir større jo videre strataene er. For i størst mulig utstrekning å eliminere denne feilen er det vanlig å bruke mange (og derved „trange") strata. Med bruk av strata som består av 3 cm diameterklasser, vil feilen bli ganske liten. Dette illustreres ved flatene nr. 10–20–30 og 40. Den beregnete kubikkmassen var 99,7 %, 99,9 %, 99,7 % og 98,9 % av den virkelige. Med videre strata kan det være nødvendig å bruke en egen beregningsmetodikk (se bl. a. Langsæter 1929). Spørsmålet om hvilken betydning vidden av strataene har, er ikke tatt opp til nærmere drøftelse her. Det skal bare pekes på det forholdet at selve inndelingen er av en viss betydning (se f. eks. Kondo 1954).

Prøvetrefordelingen har stor betydning i forbindelse med stratifisert utvalg. De fordelingsprinsipper som har størst interesse, er fordeling proporsjonalt med treantallet, grunnflatesummen samt „optimal" fordeling. Ved fordeling proporsjonalt med treantallet vil fordelingen av prøvetrærne på de enkelte strata stå i samme forhold som det totale treantallet i de enkelte strata. Ved fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen vil forholdet mellom prøvetreantallene være lik forholdet

mellom grunnflatesummene. Ved optimal fordeling er forholdet mellom prøvetreantallene lik forholdet mellom produktene av middelavvik og treantall (sml. TISCHENDORF 1925 a og 1927, LANGSÆTER 1934).

5.5.1 *Tilfeldig feil.*

Feilvariansen for et stratifisert utvalg er i sin alminnelighet

$$V(V_{st}) = \sum^{k} N_k^2 \frac{s^2(v)_k}{n_k} \qquad (5.5.1\text{–}1)$$

hvor $s^2(v)_k$ er variansen for kubikkmassen, N_k er samlet treantall og n_k er antall prøvetrær, alt i stratum k.

Når det brukes trange strata, kan feilvariansen estimeres ved formel 5.5.1–1) også i det tilfelle at beregningen i virkeligheten er foretatt på grunnlag av gjennomsnittlig høyde (istedenfor gjennomsnittlig kubikkmasse). Den feilen en gjør på denne måten er ubetydelig.

Feilvariansen for den samlete kubikkmassen når prøvetrærne er tilfeldig fordelt, er gitt ved

$$V(V_{st-t}) = \frac{N}{n} \sum^{k} N_k s^2(v)_k. \qquad (5.5.1\text{–}2)$$

Når prøvetrefordelingen har foregått proporsjonalt med grunnflatesummen, er feilvariansen

$$V(V_{st-g}) = \frac{G}{n} \sum^{k} N_k^2 \frac{s^2(v)_k}{G_k} \qquad (5.5.1\text{–}3)$$

og for optimal fordeling

$$V(V_{st-opt}) = \frac{1}{n} [\sum^{k} N_k s(v)_k]^2. \qquad (5.5.1\text{–}4)$$

Formlene (5.5.1–2), (5.5.1–3) og (5.5.1–4) gjelder strengt tatt ikke helt når det samlete prøvetreantallet er ganske lite. Dette skyldes at antall prøvetrær i hvert stratum bare kan være et helt tall. Den unøyaktigheten en begår ved å bruke formlene istedenfor først å beregne antallet og deretter variansen etter formel (5.5.1–1), er ubetydelig.

Middelfeilene for de tre kuberingsmåtene framgår av tabell 5.7. Det ble brukt 2 cm diameterklasser. Stratifisert utvalg med tilfeldig prøvetrefordeling har meget lavere effektivitet enn med fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen i strataene. I gjennomsnitt er middelfeilen 3,7 %

Tabell 5.7. Middelfeil på samlet kubikkmasse ved stratifisert utvalg, 20 prøvetrær.

Standard error of total volume for stratified sampling, 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	$n_i = kN_i$		$n_i = kN_ig_i$		$n_i = kN_iS_i$	
	m³/ha	%	m³/ha	%	m³/ha	%
1	4,1	2,4	3,0	1,8	2,6	1,5
2	6,7	2,7	5,7	2,3	5,6	2,2
3	4,3	2,4	3,0	1,7	2,5	1,4
4	2,8	5,2	2,0	3,7	1,9	3,5
5	8,4	5,0	6,3	3,8	6,2	3,8
6	6,5	3,2	5,1	2,5	4,9	2,4
7	5,5	4,8	4,0	3,5	3,9	3,5
8	9,2	3,2	6,6	2,3	6,3	2,2
9	7,2	1,9	6,6	1,7	6,4	1,6
10	9,8	2,4	9,1	2,2	8,3	2,0
11	6,6	2,3	6,3	2,2	5,9	2,0
12	7,5	2,4	6,5	2,1	6,0	2,0
13	6,5	4,0	5,4	3,4	5,3	3,3
14	6,6	2,2	5,9	2,0	5,5	1,8
15	7,0	3,8	5,5	3,0	5,4	2,9
16	2,0	3,7	1,2	2,2	1,1	1,9
17	4,4	5,8	2,2	2,9	2,0	2,7
18	2,8	4,4	1,4	2,2	1,2	1,9
19	6,0	4,1	3,5	2,4	3,3	2,2
20	6,8	6,2	4,0	3,8	3,7	3,4
21	11,1	3,7	9,1	3,0	8,3	2,8
22	6,5	2,7	5,4	2,3	4,5	1,9
23	2,9	2,4	1,8	1,4	1,7	1,4
24	7,6	4,4	5,0	2,8	4,5	2,6
25	6,9	2,4	5,5	1,9	4,9	1,7
26	2,8	3,3	2,1	2,4	1,9	2,2
27	1,6	2,0	1,5	1,9	1,4	1,8
28	2,8	3,8	2,4	3,2	2,2	2,9
29	3,9	4,2	3,5	3,7	2,8	3,0
30	5,2	2,8	4,4	2,4	4,0	2,2
31	4,8	2,2	4,0	1,8	3,5	1,6
32	5,0	2,8	4,1	2,3	3,7	2,1
33	3,1	4,8	2,5	3,9	2,3	3,6
34	7,9	5,2	5,7	3,8	5,2	3,4
35	3,9	3,6	3,1	2,9	2,7	2,5
36	3,7	3,3	2,7	2,4	2,5	2,3
37	3,0	2,1	1,9	1,4	1,6	1,1
38	3,1	5,4	1,6	2,8	1,4	2,4
39	5,4	5,7	3,2	3,4	2,6	2,8
40	3,6	4,8	2,5	3,4	2,4	3,2
41	14,5	7,9	10,0	5,5	9,3	5,1
42	1,8	3,3	1,4	2,6	1,3	2,4

i det første tilfelle mot 2,7 % i det annet, under forutsetning av 20 prøvetrær.

I praksis vil det ikke være mulig å bruke optimal fordeling fordi variansen innen de forskjellige strata ikke er kjent på forhånd. Det er derfor viktig å notere at fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen gir nesten like lav middelfeil som optimal fordeling, som i gjennomsnitt har gitt en middelfeil på 2,5 %.

Näslund (1944) har behandlet nøyaktigheten ved kubering etter stratifisert utvalg under forutsetning av at det brukes seksjonskuberte prøvetrær. Undersøkelsen omfattet „provytor", „bestånd" og „trakter". For „bestånd", som inntar en slags mellomstilling, ble funnet at det måtte tas fra 20 til 38 prøvetrær for at middelfeilen skulle bli 3 %. Det er da forutsatt fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med treantallet (konstant kvotient). Tallene blir lettere å sammenlikne med tabell 5.7 hvis de blir „snudd om": For 20 prøvetrær varierte middelfeilen mellom 3,0 % og 4,1 %. Den gjennomsnittlige middelfeilen synes å svare noenlunde til gjennomsnittet i den foreliggende undersøkelsen (3,7 %). Normalt bør den beregnete middelfeilen bli noe større når det brukes seksjonskuberte prøvetrær enn når kuberingen foretas ved kubikktabell.

Virkningen av prøvetrefordelingen ble undersøkt nærmere på 2 „trakter". Det måtte tas 12–28 % flere prøvetrær ved fast kvotient enn ved optimal fordeling. Denne forskjellen i prøvetreantall er relativt liten i forhold til den forskjellen i middelfeil som er registrert i den foreliggende undersøkelsen.

5.6 *Kubering ved bestandsvolumtabell.*

Ved hjelp av en bestandsvolumtabell kan kubikkmassen bestemmes direkte når grunnflatesum og middelhøyde er kjent. Det er derfor naturlig at interessen for denne kuberingsmåten har økt betraktelig i den senere tid fordi det er funnet midler til rask bestemmelse av grunnflatesum (Bitterlich 1948), middelhøyde (Hirata 1955, Essed 1957) eller produktet av de to (Strand 1958).

Kubikkmassen av et bestand kan uttrykkes som produktet av grunnflatesum, middelhøyde og formtall:

$$V = GHF. \tag{5.6-1}$$

Det må alltid være samhørighet mellom middelhøyde og formtall. Defineres middelhøyden f. eks. som grunnflateveiet middelhøyde, blir formtallet et annet enn når middelhøyden er definert som aritmetisk middelhøyde.

Bestandsformhøyden (HF) synes å vise en sterk sammenheng med middelhøyden. Dette har vært benyttet som utgangspunkt ved konstruksjon av tabeller (Flury 1897, Nordquist 1924, Nyyssönen 1955). Som påpekt av Eide (1927), må en imidlertid regne med at sammenhengen mellom bestandsformhøyden og middelhøyden vil være avhengig av skogbehandlingen og av geografisk område.

Det foreligger ingen norsk bestandsvolumtabell for østnorsk gran, men Eide (1927) har en grafisk framstilling som viser formhøyden (for kubikkmasse uten bark) som funksjon av middelhøyden. Det er inntegnet to kurver, en for østlandsk og en for nordenfjeldsk granskog. Som nevnt har Brantseg (1951) påpekt at det synes å være en viss forskjell i form mellom øst- og vest-norsk gran. Tabellene for Vest-Norge kan derfor ikke uten videre benyttes i Øst-Norge.

Nyyssönen (1955) har utarbeidet en bestandsvolumtabell for gran, furu og bjørk. Tabellen er basert på finsk materiale og gir kubikkmassen med bark. Grunnflatesum og den betingete middelhøyden for en diameter som svarer til grunnflatemediandiameteren, danner innganger i tabellen. Grunnflatemediandiameteren er den diameter som deler grunnflatesummen i to deler slik at grunnflatesummen av trær med mindre diameter enn grunnflatemediandiameteren, er lik grunnflatesummen av trær med større diameter enn grunnflatemediandiameteren. I praksis kan en lettvint få et estimat på denne diameteren når en bruker relaskop. De trærne som telles med når en bruker relaskop, klaves også. Når klavingen er foretatt, ordnes trærne etter diameteren. På grunnlag av denne rangeringen bestemmes diameteren av det treet som ligger i midten. Hvis det samlete treantall er et like tall, kan brukes middeltallet for de to trærne som faller nærmest midten. Den diameteren som blir bestemt på denne måten, vil falle ganske nær den sanne grunnflatemediandiameteren.

5.6.1 *Systematiske feil.*

De 42 flatene ble kubert ved hjelp av Nyyssönens tabell. Høyden for den diameteren som svarer til grunnflatemediandiameteren, ble bestemt på grunnlag av høydekurven for de enkelte flatene.

Den beregnete kubikkmassen var gjennomgående større enn den virkelige kubikkmassen (som ble funnet ved stammevis kubering etter Eides kubikktabell). I gjennomsnitt var differensen mellom de to kubikkmassene 17,4 m³/ha eller 10,4 %.

Differensen ble noe mindre når middelhøyden ble definert som grunnflateveiet middelhøyde: 8,3 m³/ha eller 5,0 %. Middelavviket for differensene var 7,2 m³/ha eller 4,3 %.

Hvis kubikkmassen bestemt etter Eides tabell ansees som riktig, synes Nyyssönens tabell å gi en systematisk feilkubering. Dette kan skyldes reelle forskjeller mellom finsk og norsk gran hva formen angår, og/eller forskjeller som skyldes ulike kuberingstall. Den systematiske forskjellen spiller imidlertid mindre rolle i denne forbindelse. Det lar seg godt gjøre å lage en bestandsvolumtabell som er fri for generell forventningsskjevhet. Derimot må en sikkert regne med at estimatene vil bli beheftet med spesiell forventningsskjevhet. Middelavviket for differensene mellom de to kubikkmassene (etter Nyyssönens og Eides tabeller) er et omtrentlig mål for størrelsen av denne forventningsskjevheten. Som nevnt er dette middelavviket 4,3 %. Det vil si at en må regne med en spesiell forventningsskjevhet på ca. 4 % eller større i ett av tre tilfelle. Forventningsskjevheten er såpass stor at en ikke kan se helt bort fra den. Ved å utarbeide spesielle tabeller som i tillegg til grunnflatesum og høyde, har andre bestandskjennetegn som inngang, vil sannsynligvis forventningsskjevheten kunne reduseres noe. Slike tabeller foreligger imidlertid ikke.

5.6.2 *Tilfeldige feil.*

Kubering etter bestandsvolumtabell forutsetter kjennskap til grunnflatesum og middelhøyde. En tilfeldig feil på den ene eller begge disse størrelsene vil gi feil på kubikkmassen.

Grunnflatesummen kan estimeres ved bruk av relaskop eller ved klaving av alle trærne. Ved nøyaktig klaving vil feilen på grunnflatesummen bli så liten at en i praksis kan se bort fra den (Tirén 1929).

Brukes relaskop, må en regne med en tilfeldig feil av størrelsesorden 15 % på den enkelte måling, når grunnflatesummen skal bestemmes for en avgrenset prøveflate (Seip 1952). Selve målefeilen synes å være av størrelsesorden 10 % (Strand 1956).

Feilen på middelhøyden avhenger til en viss grad av hvilken middelhøyde som brukes.

Grunnflateveiet middelhøyde er definert ved uttrykket

$$h_L = \frac{\sum_k G_k \bar{h}_k}{\sum_k G_k} \qquad (5.6.2\text{–}1)$$

hvor G_k er grunnflatesum og $\bar{h}_k$ gjennomsnittlig høyde i diameterklasse k. I sin alminnelighet er feilvariansen for middelhøyden

$$\sigma^2(h_L) = \frac{\sum_k^k G_k^2 \frac{\sigma^2(h)_k}{n_k}}{(\sum_k G_k)^2} \qquad (5.6.2\text{–}2)$$

hvor $\sigma^2(h)_k$ er variansen for høyden og n_k er prøvetreantall i diameterklasse k. Den optimale fordelingen av prøvetrærne er gitt ved formelen

$$n_k = n \frac{G_k \sigma(h)_k}{\sum_k (G_k \sigma(h)_k)} \qquad (5.6.2\text{–}3)$$

hvor n er det samlete prøvetreantallet (se f. eks. LANGSÆTER 1934). I praksis vil $\sigma(h)_k$ ikke være kjent. Det spiller imidlertid mindre rolle om prøvetrefordelingen avviker litt fra den optimale (se eksempel hos COCHRAN 1953).

Høydespredningen synes å være omtrent konstant fra diameterklasse til diameterklasse (sml. avsnitt 5.2.3). Det er derfor naturlig å fordele prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummene i klassene. LANGSÆTER (l.c.) fant i ett tilfelle at den relative effektiviteten av fordeling etter grunnflatesummen var 96 % i forhold til optimal fordeling. Fordeling etter treantallet (konstant prøvetrekvotient) ga en relativ effektivitet som bare var 40 %.

Når prøvetrærne fordeles proporsjonalt med grunnflatesummen, kan variansen for middelhøyden estimeres ved formelen

$$V(h_L) = \frac{1}{n} \frac{\sum_k^k G_k s^2(h)_k}{\sum_k G_k} \qquad (5.6.2\text{–}4)$$

hvor $s^2(h)_k$ er den estimerte variansen for høyden i diameterklasse k.

Middelfeilen for grunnflateveiet middelhøyde ble bestemt for de 42 flatene ved bruk av 2 cm diameterklasser. Resultatet framgår av tabell 5.8. Av tabellen sees at middelhøyden blir bestemt med ganske stor nøyaktighet når det brukes 20 prøvetrær. Det er bare i ca. 10 % av flatene at middelfeilen går over 3 %.

Når grunnflatesummen bestemmes ved relaskop, kan grunnflateveiet middelhøyde estimeres ved den aritmetiske middelhøyden av de trærne som telles med i relaskopet. Relaskopet bygger på det prinsippet at trærne velges ut med sannsynlighet proporsjonal med grunnflaten (*sps*-utvalg).

Tabell 5.8. Middelfeil for grunnflateveiet middelhøyde, bestemt ved 20 prøvetrær som er fordelt proporsjonalt med grunnflatesummen, stratifisert utvalg.
Standard error of weighted mean height, when basal area is used as weight (= Lorey's mean height). 20 sample trees allocated according to the basal area, stratified sampling.

Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*		Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*	
	m	%		m	%
1	0,29	1,5	22	0,33	1,6
2	0,28	1,5	23	0,31	1,5
3	0,29	1,4	24	0,42	2,7
4	0,21	2,4	25	0,41	2,0
5	0,28	2,7	26	0,28	1,9
6	0,29	1,7	27	0,22	1,3
7	0,31	2,5	28	0,29	2,5
8	0,48	1,9	29	0,43	2,7
9	0,34	1,4	30	0,39	1,9
10	0,38	1,7	31	0,36	1,7
11	0,33	1,6	32	0,36	1,8
12	0,32	1,5	33	0,34	3,4
13	0,42	2,5	34	0,37	2,8
14	0,31	1,4	35	0,28	2,0
15	0,27	1,9	36	0,34	2,2
16	0,24	1,8	37	0,30	1,5
17	0,38	2,5	38	0,56	3,5
18	0,47	3,0	39	0,35	2,6
19	0,35	1,9	40	0,33	2,6
20	0,47	3,7	41	0,44	2,0
21	0,50	2,3	42	0,23	2,2

I praksis vil det ikke være aktuelt å måle høydene av alle de trærne som faller i relaskopet. En vil bruke et utvalg av disse trærne. Når middelhøyden estimeres på denne måten, kan en finne et estimat på feilvariansen ved uttrykket

$$V(h_L) = \frac{S(h_i - \bar{h})^2}{n(n-1)} \qquad (5.6.2\text{-}5)$$

hvor h_i er høyden av det i'te tre som ble valgt ut ved *sps*-utvalg, og $\bar{h}$ er gjennomsnittet av h'ene (sml. YATES 1953).

I tilfelle at utvalget i virkeligheten har foregått som et tilfeldig utvalg, kan en få et estimat på den variansen en ville fått ved *sps*-utvalg ved formelen

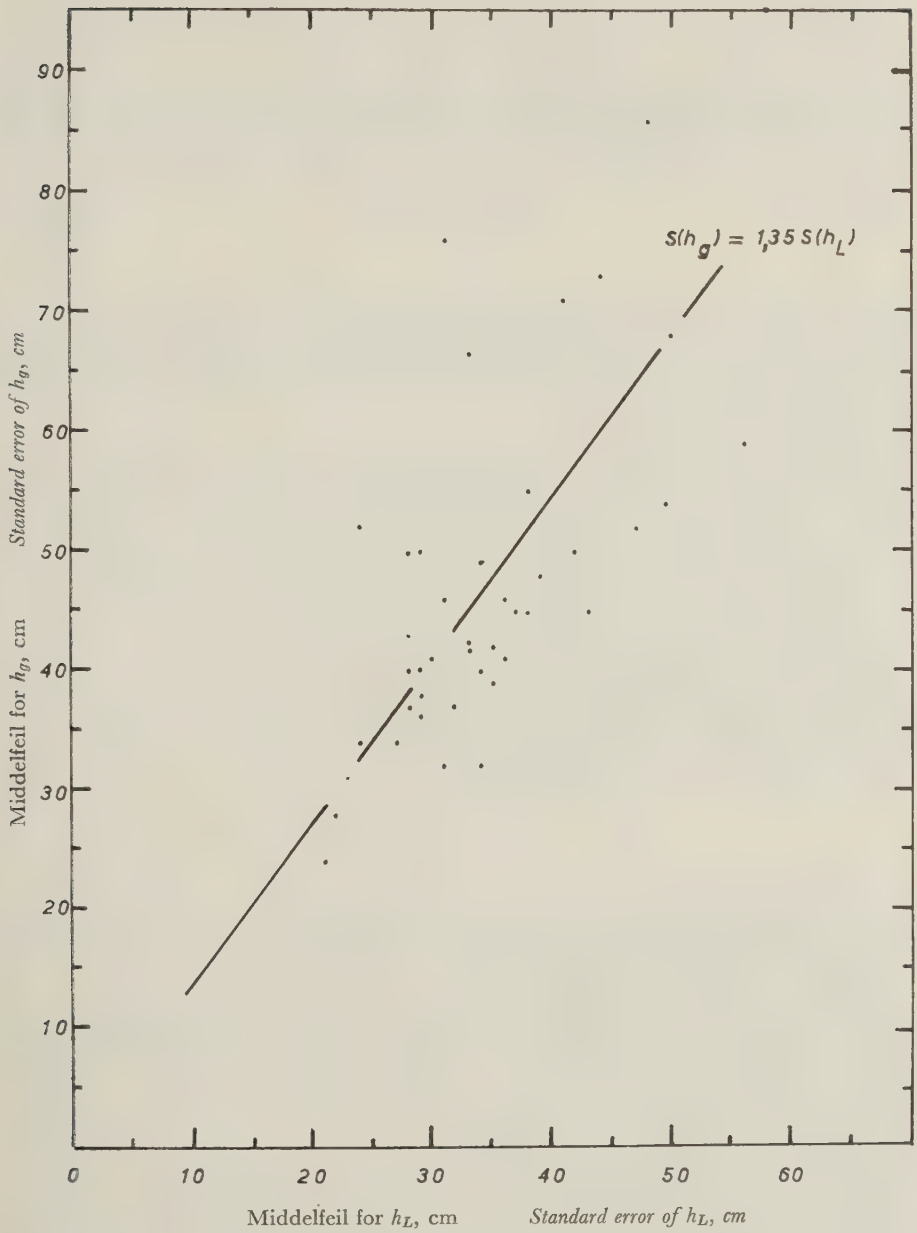
$$V(h_L) = \frac{1}{n(n-1)\bar{g}}\left[S\left(\frac{g^2h^2}{g}\right) - \frac{\{S(gh)\}^2}{S(g)}\right] \qquad (5.6.2\text{-}6)$$

Tabell 5.9. Middelfeil for grunnflateveiet middelhøyde, bestemt ved *sps*-utvalg (proporsjonalt med grunnflaten) - 20 prøvetrær.
Standard error of Lorey's mean height estimated by sampling with probability proportional to basal area - 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*		Flate nr. *Plot No.*	Middelfeil *Standard error*	
	m	%		m	%
1	0,94	4,9	22	0,83	4,1
2	0,60	3,2	23	1,01	5,0
3	0,72	3,5	24	0,79	5,2
4	0,70	8,0	25	0,79	3,8
5	0,69	6,6	26	0.75	5,1
6	0,73	4,2	27	0,26	1,6
7	0,71	5,8	28	0,62	5,3
8	0,91	3,7	29	1,05	6,6
9	0,66	2,7	30	0,56	2,7
10	0,70	3,2	31	0,79	3,8
11	0,54	2,5	32	0,76	3,7
12	0,66	3,2	33	0,79	7,9
13	0,77	4,6	34	0,82	6,1
14	0,37	1,7	35	0,96	6,7
15	0,69	4,8	36	0,82	5,2
16	1,01	7,7	37	0,88	4,3
17	1,17	7,6	38	1,07	6,7
18	1,12	7,1	39	0,95	7,0
19	1,11	6,0	40	0,72	5,7
20	0,81	6,4	41	0,98	4,5
21	0,94	4,3	42	0,62	5,9

hvor $\bar{g}$ er gjennomsnittlig grunnflate for prøvetrærne. Middelfeilen for middelhøyden bestemt ved *sps*-utvalg framgår av tabell 5.9. En sammenlikning med tabell 5.8 viser at middelfeilen for middelhøyden er atskillig større ved *sps*-utvalg enn ved diameterklassevis beregning, i gjennomsnitt ca. 2,5 ganger så stor.

Middelfeilen for høyden ifølge høydekurven (annengradsfunksjon) for en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren, er gitt i tabell 5.2. I figur 5.5 er foretatt en sammenlikning mellom de to middelfeilene. Gjennomgående er feilen for grunnflateveiet middelhøyde minst. Forklaringen på dette er følgende: Det framgår av formel (5.6.2–4) at variansen for grunnflateveiet middelhøyde kan betraktes som et veiet middeltall av variansene innen diameterklassene, dividert med det samlete antall prøvetrær. Variansen innen de enkelte diameterklassene synes å være noenlunde konstant (sml. Näslund 1929, Langsæter 1930). Det veiete middeltallet vil derfor svare noenlunde til residualvariansen for høydekurven. Det vil si at variansen for grunnflateveiet middelhøyde med en viss tilnærmelse kan skrives



Figur 5.5. Middelfeil for høydekurven ved d_g og for grunnflateveiet middelhøyde.
Figure 5.5. Standard error of the height curve at d_g and of Lorey's mean height.

$$V(h_L) \doteq \frac{s^2(h)}{n} \qquad (5.6.2\text{–}7)$$

hvor $s^2(h)$ er residualvariansen for høydekurven. Variansen for høydekurven ved en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren er

$$V(h_g) = k^2 \frac{s^2(h)}{n} \qquad (5.6.2\text{–}8)$$

hvor k har en verdi på 1,35 i gjennomsnitt (sml. formel 5.2.4–17). Det framgår av figur 5.5 at linjen $s(h_g) = 1{,}35\, s(h_L)$ går omtrent midt gjennom punktsvermen. Feilen for høydekurven ved en diameter som svarer til grunnflatemediandiameteren, vil være temmelig lik feilen ved grunnflatemiddeldiameteren.

Istedenfor å gå veien om høydekurven kan en velge ut prøvetrærne direkte i området omkring grunnflatemiddeldiameteren (eller grunnflatemediandiameteren). Feilvariansen for denne høyden vil være tilnærmet lik residualvariansen dividert med prøvetreantallet. Det er da forutsatt at residualspredningen er konstant. Denne framgangsmåten vil stort sett være bedre enn å bruke høydekurven.

Den samlete kubikkmassen kan uttrykkes som produkt av grunnflatesum, høyde og formtall. Hvis alle feil uttrykkes i prosent, kan feilvariansen for kubikkmassen derfor skrives:

$$V(V) = V(G) + V(h_L) + V(f) \qquad (5.6.2\text{–}9)$$

hvor $V(G)$ er feilvarians for grunnflatesum, $V(h_L)$ er feilvarians for middelhøyden og $V(f)$ er kvadratet av forventningsskjevheten (som også kan oppfattes som feil på formtallet).

Hvis grunnflatesummen bestemmes ved klaving, er $V(G)$ praktisk talt lik 0. Feilen på kubikkmassen vil da avhenge bare av feilen på høyden og hvor stor forventningsskjevheten er. Ved bruk av f. eks. 20 prøvetrær vil feilen på grunnflateveiet middelhøyde være av størrelsesorden 2 %, når prøvetrærne fordeles proporsjonalt med grunnflatesummen og det foretas diameterklassevis beregning. Regner en med forventningsskjevhet på 3 %, blir feilen på kubikkmassen 3,6 %. I dette tilfelle vil forventningsskjevheten dominere. Om nemlig antall høydemålinger reduseres fra 20 til 10, øker feilen bare til 4,1 %. (I virkeligheten må en kanskje regne med en sterkere økning fordi prøvetrefordelingen vil måtte avvike noe fra optimal fordeling.)

Noe annerledes stiller forholdet seg når grunnflatesummen estimeres med relaskop. Da vil feilen på grunnflatesummen også spille en betydelig

rolle. Hvis prøvetrærne velges ut i området omkring grunnflatemiddeldiameteren (eller grunnflatemediandiameteren), kan feilen på middelhøyden f. eks. være av størrelsesorden 5 %. Feilen på en måling av grunnflatesummen kan anslås til 10 %. For å få et noenlunde rimelig forhold mellom de to feilene (dvs. feil på grunnflatesum og feil på høyden) bør under disse forutsetningene tas relativt flere målinger av grunnflatesummen.

5.7 *Kubering ved middelstammer.*

Det er en ganske vanlig oppfatning at kubering ved middelstammer er en av de mest effektive kuberingsmåtene. Tankegangen er at det må være relativt enkelt å finne et eller flere trær som representerer gjennomsnittet for bestandet.

Den virkelige middelstammen for et bestand er som regel et abstrakt begrep. Den skulle bestå av et tre med et kubikkinnhold som svarte nøyaktig til gjennomsnittet for bestandet. Som regel må en også oppfatte denne middelstammen på en slik måte at dens øvrige egenskaper (diameter, formtall, høyde o. lign.) er ganske „gjennomsnittlige".

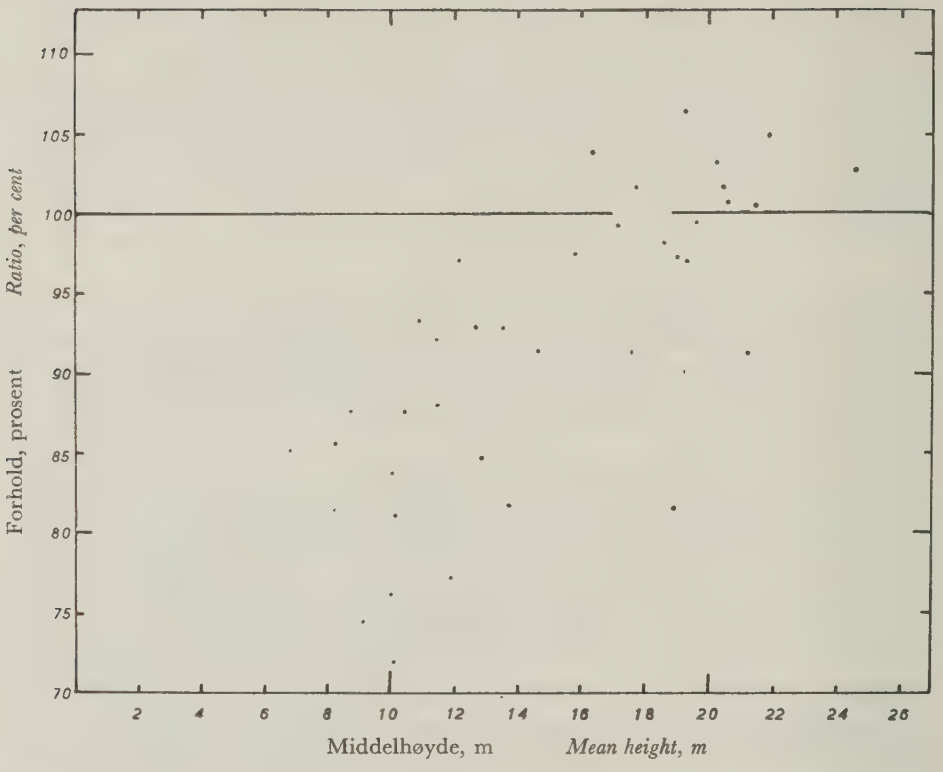
Metodene skiller seg fra hverandre etter hvordan middelstammen skal finnes. Som regel brukes diameteren som utgangspunkt, fordi diameteren er en størrelse som er sterkt korrelert med kubikkmassen og den er lett målbar. Diameteren kan enten brukes direkte til å finne middelstammen (grunnflatemiddelstamme, Hohenadl's middelstammer) eller indirekte (tariffmiddelstamme).

5.7.1 *Grunnflatemiddelstammen.*

Hvis relasjonen mellom kubikkmasse og grunnflate for enkelttrærne innen et bestand er lineær, vil kubikkmiddelstammen ha samme diameter som grunnflatemiddeldiameteren. Dette ble påpekt allerede i 1852 av Heyer (ifølge Prodan 1951). Som nevnt i avsnitt 5.3 kan en med god tilnærmelse si at denne relasjonen er lineær. Det er derfor ganske naturlig at kubering etter grunnflatemiddelstammen har fått ganske stor anvendelse.

I praksis foreligger flere muligheter: 1) Alle trærne klaves. Middeldiameteren beregnes. Det oppsøkes prøvetrær som så vidt mulig har en diameter som svarer til denne middeldiameteren. Gjennomsnittshøyden av prøvetrærne bestemmes. Kubikkinnholdet av middelstammen bestemmes på grunnlag av middeldiameteren og den gjennomsnittlige høyden.

Det kan ofte by på vansker å finne et tilstrekkelig antall prøvetrær i nærheten av middeldiameteren. Hvis en må avvike vesentlig fra middel-



Figur 5.6. Forhold mellom kubikkmasse beregnet ved grunnflatemiddelstamme og virkelig kubikkmasse.

Figure 5.6. Ratio between volume determined by the mean basal area stem and actual volume.

diameteren, arbeider metoden mindre godt. Derfor kan det i mange tilfelle synes enklere å gå fram på en annen måte. 2) Alle trær klaves. Middeldiameteren beregnes. Prøvetrærne spres over diameterskalaen (f. eks. ved å benytte konstant prøvetrekvotient). Det konstrueres en høydekurve, og høyden bestemmes for en diameter som svarer til grunnflatediameteren. Kubikkmiddelstammens innhold bestemmes på grunnlag av denne diameter og høyde.

I gjennomsnitt vil disse to framgangsmåtene gi samme resultat. Men i et aktuelt tilfelle vil det kunne bli forskjeller fordi forventningsverdien for høyden av trærne i området omkring middeldiameteren kan avvike noe fra forventningsverdien for høydekurven i samme område.

Flere undersøkelser (se f. eks. Tischendorf 1925 b og 1927, Essed 1957) har vist at kubikkmassen stort sett blir for lavt ansatt når en regner med at kubikkmiddelstammen har samme diameter som grunnflatemiddel-

diameteren. Dette illustrerer også figur 5.6, som viser forholdet mellom den kubikkmassen en får ved kubering ved hjelp av grunnflatemiddelstammen og virkelig kubikkmasse. Høyden for grunnflatemiddelstammen ble bestemt ved høydekurve (annengradsfunksjonen).

Den generelle forventningsskjevheten en får ved kubering etter grunnflatemiddelstammen, skyldes at sammenhengen mellom kubikkmasse og grunnflate *ikke* er lineær. Metoden bygger på en forutsetning som ikke holder stikk. Som det framgår av figur 5.6, er forventningsskjevheten særlig stor for bestand med lav middelhøyde. For bestand med større middelhøyde synes det ikke å være noen markert tendens til forventningsskjevhet.

Den generelle forventningsskjevheten kan elimineres ved en lineær funksjon av middelhøyden. Når dette ble gjort, var middelavviket for differensen mellom virkelig og korrigert, beregnet kubikkmasse lik 9,3 m^3/ha eller 5,6 %.

Den samlete kubikkmassen bestemmes som produkt av kubikkmassen av grunnflatemiddelstammen og treantallet. Når det foretas oppklaving av trærne, vil både grunnflatemiddeldiameteren og treantallet bestemmes praktisk talt uten feil. Feilen på kubikkmassen i prosent vil da bli noe større enn den prosentiske feilen på høyden av grunnflatemiddelstammen. Hvis høyden bestemmes ved høydekurven, er feilen

$$s(h_g)_{\%} \approx 1{,}35 \frac{s(h)_{\%}}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1\text{–}1)$$

hvor $s(h)_{\%}$ er residualspredningen uttrykt i prosent av h_g (sml. avsnitt 5.2.4).

Bestemmes derimot høyden av grunnflatemiddelstammen ved å velge prøvetrærne i området omkring middeldiameteren, kan feilen med en viss tilnærmelse skrives

$$s(h_g)_{\%} \approx \frac{s(h)_{\%}}{\sqrt{n}}. \qquad (5.7.1\text{–}2)$$

Formelen bygger på den forutsetning at middelavviket for trehøydene svarer noenlunde til residualspredningen. For at denne forutsetningen skal gjelde, er det en betingelse at prøvetrærnes diametre maksimalt avviker noen få centimeter fra middeldiameteren.

I betraktning av den relativt store spesielle forventningsskjevheten en må regne med ved denne kuberingsmetoden, bør den bare benyttes i de tilfelle hvor det ikke stilles store krav til nøyaktigheten. Det vil ikke ha

noen hensikt å ta mange prøvetrær. Prøvetrærne bør ifølge det foregående velges ut så nær middeldiameteren som mulig. Det framgår av tabell 5.1 at residualspredningen når opp til ca. 15 %. Ved bruk av 10 prøvetrær må en derfor regne med en tilfeldig feil på opp til ca. 5 %.

5.7.2 *Tariffmiddelstammen.*

Siden kubering ved grunnflatemiddelstammen gir estimater som kan være beheftet med relativt stor generell forventningsskjevhet, kan det være grunn til å nevne andre middelstammer som gir bedre resultat.

Tariffmiddelstammen finnes ved å dele den samlete tariffkubikkmassen med treantallet. Til denne gjennomsnittlige tariffkubikkmassen svarer en bestemt diameter som finnes ved interpolasjon i tariffen. Denne diameteren brukes som tariffmiddelstammens diameter (sml. Tischendorf 1925 a).

Hvis tariffene er basert på masselinjen slik som Hummels tariffer (Hummel 1955), vil tariffmiddelstammens diameter svare nøyaktig til grunnflatemiddeldiameteren.

Høyden av tariffmiddelstammen kan finnes på to måter som for grunnflatemiddelstammen. Som regel vil det lønne seg best å velge prøvetrærne så nær middelstammen som mulig.

For de 42 flatene ble kubikkmassen beregnet ved hjelp av tariffmiddelstammen etter Vigerusts „høydeklasser". Den beregnete kubikkmassen var i gjennomsnitt 1,1 m³/ha eller 0,7 % for stor. Dette tyder på at den generelle forventningsskjevheten må være relativt liten.

Middelavviket for differensen mellom beregnet og virkelig kubikkmasse kan brukes som et mål på den spesielle forventningsskjevheten. Dette middelavviket var 5,2 %, altså av samme størrelsesorden som for grunnflatemiddelstammen. Den tilfeldige feilen ved kubering etter tariffmiddelstammen vil også svare temmelig nøye til feilen for grunnflatemiddelstammen.

5.7.3 *Hohenadl's middelstammer.*

Hohenadl (1924, 1929, 1932, 1936 og 1939) foreslo å bruke to middelstammer til bestemmelse av kubikkmassen. De to middelstammene har diametrene

$$\left.\begin{aligned} d_+ &= \bar{d} + s_d \\ d_- &= \bar{d} - s_d \end{aligned}\right\} \qquad (5.7.3\text{–}1)$$

hvor s_d er middelavviket for diameteren.

Grunnlaget for Hohenadl's metode er at hvis sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter kan uttrykkes ved en annengradsfunksjon,

$$v = b_1 + b_2 d + b_3 d^2 \qquad (5.7.3\text{–}2)$$

er kubikkmiddelstammen gitt ved formelen

$$\bar{v} = b_1 + b_2 \bar{d} + b_3 (\bar{d}^2 + s_{\bar{d}}^2). \qquad (5.7.3\text{–}3)$$

Nå er kubikkmassen av „øvre" middelstamme

$$v_+ = b_1 + b_2 (\bar{d} + s_{\bar{d}}) + b_3 (\bar{d} + s_{\bar{d}})^2 \qquad (5.7.3\text{–}4)$$

og kubikkmassen av „nedre" middelstamme

$$v_- = b_1 + b_2 (\bar{d} - s_{\bar{d}}) + b_3 (\bar{d} - s_{\bar{d}})^2. \qquad (5.7.3\text{–}5)$$

Det vil si at middeltallet av kubikkmassene for de to middelstammene er lik kubikkmiddelstammen. Ved denne metoden finnes altså den samlete kubikkmassen ved å multiplisere det totale treantallet med middeltallet av kubikkmassene for de to middelstammene.

I praksis kan kubikkmassen av middelstammene finnes enten ved hjelp av høydekurven eller ved å velge ut prøvetrærne i områdene omkring „øvre" og „nedre" diameter. På grunn av at de to diametrene ligger relativt langt fra de sentrale partiene, vil feilen på høydekurven bli forholdsvis stor ved disse diametrene. Derfor anbefaler f. eks. VAN LAAR (1951) at en ikke bruker høydekurven, men den andre framgangsmåten. Hvis verdien av $s_{\bar{d}}$ skal bestemmes nøyaktig, kreves en del regnearbeid. KRENN (1940) har gitt en metode som kan redusere arbeidet noe.

Den generelle forventningsskjevheten synes å være liten når kubikkmassen bestemmes ved Hohenadl's metode. I gjennomsnitt for de 42 flatene ga denne metoden en kubikkmasse som var 2,3 m³/ha eller 1,4 % for stor. Kubikkmassen av middelstammene ble da funnet ved hjelp av høydekurven. Middelavviket for differensene mellom virkelig og beregnet kubikkmasse var 5,9 m³/ha eller 3,6 %. Den spesielle forventningsskjevheten vil derfor også være forholdsvis liten, men i enkelte tilfelle må en regne med at den er så stor at en ikke uten videre kan se bort fra den.

Når kubikkmassen for de to middelstammene bestemmes på grunnlag av høydekurven, kan en få et estimat på feilen for den samlete kubikkmassen på liknende måte som ved kubering etter høydekurven:

$$V(V_{Hm}) = \frac{N^2}{4} s^2(h) \sum_{k,l}^{3} \left(\frac{\partial f_+}{\partial b_k} + \frac{\partial f_-}{\partial b_k}\right)\left(\frac{\partial f_+}{\partial b_l} + \frac{\partial f_-}{\partial b_l}\right) c_{kl} \qquad (5.7.3\text{–}6)$$

hvor $\partial f_+/\partial b_k$ er den deriverte av kubikkmassen for „øvre" middelstamme m. h. p. b_k. $s^2(h)$ er residualvariansen for høydekurven.

Hvis middelstammene bestemmes på grunnlag av prøvetrær som velges ut i områdene ved „øvre" og „nedre" diameter, estimeres feilvariansen ved

$$V(V_{Hm}) = \frac{N^2}{4}\left[\frac{s^2(v_+)}{n_+} + \frac{s^2(v_-)}{n_-}\right] \qquad (5.7.3\text{–}7)$$

hvor $s^2(v_+)$ er variansen for kubikkmassene av prøvetrærne og n_+ er antall prøvetrær ved „øvre" diameter. $s(v_+)$ vil alltid være meget større enn $s(v_-)$. Av den grunn vil det lønne seg å fordele prøvetrærne slik at forholdet mellom n_+ og n_- er omtrent som forholdet mellom $s(v_+)$ og $s(v_-)$. Det er vanskelig å vite på forhånd hvordan dette forholdet er. Går en ut fra at høydespredningen holder seg omtrent konstant, bør forholdet n_+/n_- være omtrent lik d^2_+/d^2_-. Krenn (1944) foreslår å velge n_+/n_- lik v_+/v_-.

Når kubikktallene bare foreligger i form av tabeller, er det vanskelig å få gode estimater på middelfeilen ved formel (5.7.3–6) idet en da må bygge på differenser (sml. avsnitt 5.2.5). Hvis det er uregelmessigheter i tabellen, vil det bevirke relativt store endringer i førsteordens-differensene. For å eliminere disse uregelmessighetene, kan en bruke differenser av høyere orden, men det fører til atskillig regning.

Ved bruk av ortogonale polynomer ville det være lettere å bestemme middelfeilen på noenlunde tilfredsstillende måte bare ved å bruke førsteordens-differenser. Det er imidlertid lite sannsynlig at kubikkmassen vil bli bestemt via høydekurven når det brukes middelstammer. Det er derfor ikke gjennomført egen beregning av middelfeilen for dette tilfellet.

Treantallet på de fleste flatene som er undersøkt, er så lite at en ikke får pålitelige tall for middelfeilen ved formel (5.7.3–7). Skal middelfeilen f. eks. baseres på 20 prøvetrær, måtte det i flere tilfelle velges prøvetrær som avvek 5 cm eller mer fra middelstammenes diametre. Middelfeilen er derfor ikke beregnet for denne framgangsmåten heller.

6. Samlet vurdering av kuberingsmetodene.

Det er med kuberingsmetoder som med estimeringsmetoder i sin alminnelighet: Noen metoder er raske i bruk og lite arbeidskrevende, men gir relativt unøyaktige resultater. Andre metoder gir nøyaktige resultater, men krever mer arbeid. Til den første gruppen kan en regne kubering

etter bestandsvolumtabell og forskjellige middelstammer. Kubering etter stratifisert utvalg, ved høydekurve og masselinje kan regnes til den andre gruppen. Hvorvidt en bør velge en kuberingsmetode fra den ene eller andre gruppen, avhenger for en vesentlig del av formålet med kuberingen. Hvis interessen samler seg om kubikkmassen for den enkelte prøveflate, vil det være naturlig å velge en nøyaktig (og arbeidskrevende) metode. Er derimot prøveflatene selv et utvalg av en større populasjon, vil det ofte være bedre å velge en unøyaktigere (og raskere) kuberingsmetode for kubering av den enkelte prøveflate. Den nøyaktigste metoden for kubering av en prøveflate er med andre ord ikke alltid å foretrekke.

Formålet med kuberingen har som regel også en viss betydning for hvilken størrelse prøveflatene bør ha. Hvis prøveflatene utgjør et utvalg og deres viktigste funksjon er å danne utvalgsenheter for estimering av populasjonsverdiene, vil gjerne prøveflatestørrelsen velges slik at den er ganske liten (av størrelsesorden 100–400 m^2). Har derimot resultatene for den enkelte flate betydelig interesse i seg selv, velges større prøveflater (av størrelsesorden 1 da–1 ha).

Den foreliggende undersøkelsen bygger på prøveflater som vesentlig er av størrelse 1 da. Et spørsmål som melder seg, er i hvilken grad resultatene for denne flatestørrelsen gjelder for andre flatestørrelser.

Stort sett øker variasjonen i en bestemt egenskap (f. eks. diameter, høyde) innen en prøveflate med flatestørrelsen. Virkningen av flatestørrelsen er imidlertid ikke særlig sterk for arealer over f. eks. 200 m^2 forutsatt at en hele tiden holder seg innen et bestand (Strand 1957). Det samme gjelder også for residualspredningene (for høydekurve, masselinje osv.).

Flatestørrelsen har liten betydning for spørsmålet om hvilke metoder som gir minst middelfeil for et bestemt prøvetreantall. Derimot kan den ha en viss betydning for det antall prøvetrær som er nødvendig for å få middelfeilen under et bestemt nivå. Ser en bort fra korreksjonsfaktoren for endelig populasjon, har imidlertid flatestørrelsen relativt liten betydning også i dette tilfelle, fordi den har såpass liten virkning på variasjonen eller residualspredningen. Her må en også ta i betraktning at det er meget vanskelig på forhånd å angi presist hvilket prøvetreantall som bør tas for at middelfeilen skal ha en bestemt størrelse. Som det framgår av beregningene over middelfeilene for de forskjellige metodene, er det meget stor variasjon mellom de flatene som er undersøkt.

Med den problemstillingen som er lagt til grunn for undersøkelsen, samler interessen seg i første rekke om de systematiske og tilfeldige feilene som kuberingsmetodene synes å gi. Det bør understrekes at det er liten grunn til å legge for stor vekt på resultatene for en enkelt eller noen ganske

få prøveflater. Riktignok kan en si at den „sanne" middelfeilen er kjent i og med at middelfeilen er bestemt på grunnlag av alle trærne. Men en slik betraktningsmåte har mindre interesse fordi tilfeldighetene vil spille en stor rolle når populasjonene er små. En kuberingsmetode som i og for seg er dårlig, kan i spesielle tilfelle gi gode resultater. Et annet forhold som trekker i samme retning, er at en ved beregningen av middelfeilene er nødt til å bygge på visse forutsetninger. Disse kan kanskje gjelde i det store og hele, dvs. som gjennomsnitt for en rekke flater. Men for den enkelte flate kan de svikte i større eller mindre grad. Et par av disse forutsetningene er diskutert nærmere i forbindelse med kubering etter masselinjen og *dhf*-linjen (avsnitt 5.3.1 og 5.3.2). Også for de fleste andre kuberingsmetodene gjelder liknende forhold.

Ialt er 42 flater behandlet. Dette materialet er sikkert for lite til å gi nøyaktige tall for hvilke gjennomsnittlige middelfeil som kan påregnes med et bestemt prøvetreantall. For å kunne bestemme dette kreves et meget stort materiale. Noe annerledes ligger forholdet an når det gjelder vurderingen av kuberingsmetodene. Det som i første rekke har interesse, er å få rede på hvilke metoder som er avgjort bedre enn de øvrige. Derimot har det mindre betydning å kunne rangere metodene meget nøyaktig i forhold til hverandre. For praktisk bruk vil en rekke andre momenter være av betydning når en skal avgjøre hvilken metode som skal brukes. Sett på denne bakgrunn synes materialet tilstrekkelig.

Den kuberingsmetoden som gir det nøyaktigste resultat for et bestemt prøvetreantall, er stratifisert utvalg med optimal fordeling av prøvetrærne. I gjennomsnitt har denne metoden gitt en middelfeil på 2,5 % med 20 prøvetrær.

I praksis er det vanskelig å bruke optimal fordeling av prøvetrærne fordi variansen i kubikkmasse innen de enkelte strata må være kjent før kuberingen. Det er derfor tilfredsstillende å se at stratifisert utvalg med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen gir nesten like godt resultat. I gjennomsnitt har denne metoden gitt en middelfeil på 2,7 % for 20 prøvetrær. Grunnen til at forskjellen mellom de to kuberingsmetodene ikke er større, er at produktet av treantall og middelavvik innen de forskjellige strata er omtrent proporsjonalt med grunnflatesummen. Det vil også si at spredningen i høyde synes å være omtrent konstant. Det er derfor ganske naturlig at stratifisert utvalg med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med treantallet gir dårligere resultat. I gjennomsnitt har denne metoden gitt en middelfeil på 3,7 % for 20 prøvetrær.

Flere kuberingsmetoder bygger på en regresjonsfunksjon. Det gjelder kubering etter høydekurve, masselinje og *dhf*-linje. Disse metodene har

alle gitt noenlunde det samme resultat. I gjennomsnitt er middelfeilene henholdsvis 3,5 %, 3,9 % og 3,9 %, ved bruk av 20 prøvetrær. Dette resultatet kan synes å stå i strid med det som tidligere er anført om betydningen av å bruke veiet regresjon. Det er derfor grunn til å diskutere forholdet mer i detalj.

Hvis forventningsverdien for estimanden er en lineær funksjon av en eller flere variable, er det beste, lineære forventningsrette estimatet gitt ved en veiet regresjonsestimator. Vektene skal være proporsjonale med de sanne residualvariansene (David og Neyman 1938)

Er f. eks.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i \tag{6–1}$$

hvor $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$, er det beste estimatet på totalverdien for y gitt ved

$$Y = N[\bar{y}_w + b_w(\bar{x}_N - \bar{x}_w)] \tag{6–2}$$

hvor

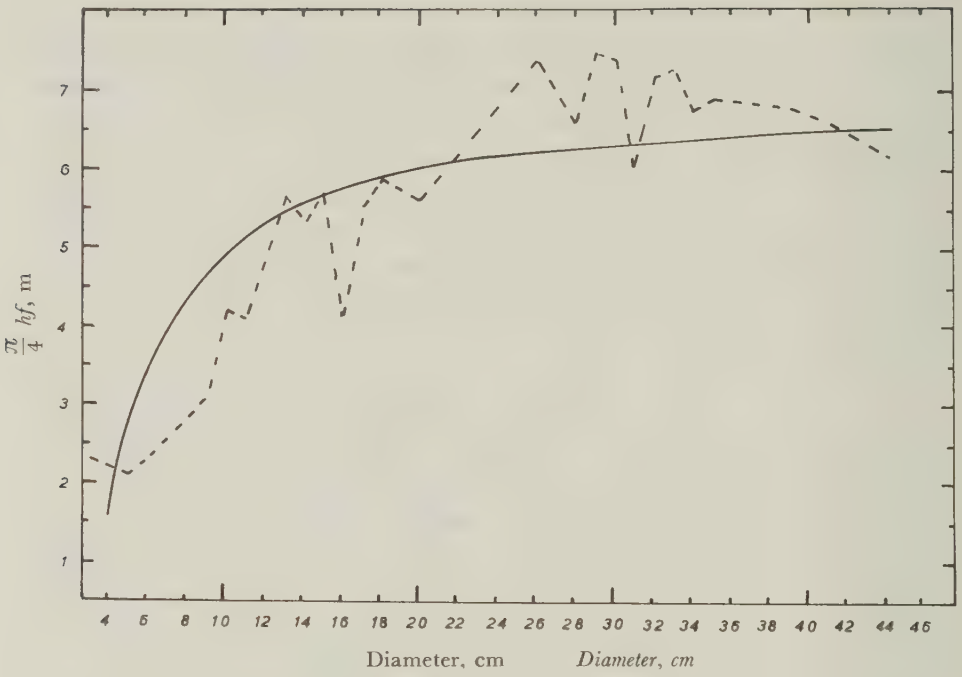
$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_w &= \frac{1}{Sw} Swy,\ \bar{x}_w = \frac{1}{Sw} Swx \\ b_w &= \frac{Sw(y_i - \bar{y}_w)(x_i - \bar{x}_w)}{Sw(x_i - \bar{x}_w)^2} \\ & w \propto \sigma_i^{-2}. \end{aligned}\right\} \tag{6–3}$$

Cochran (1942) og Sukhatme (1953) har diskutert effektiviteten av en uveiet i forhold til en veiet regresjonsestimator for en modell som svarer til formel (6-1). Feilvariansen for regresjonsestimatoren (6–2) estimeres ved formelen

$$V(Y) = \frac{N^2}{(n-2)} s_{wy}^2 (1 - r^2)\left(1 + \frac{(\bar{x}_N - \bar{x}_w)^2}{s_{wx}^2}\right). \tag{6–4}$$

Ser en bort fra det andre leddet i uttrykket for feilvariansen, er effektiviteten tilnærmet lik $n^2/[Sw \cdot S(1/w)]$ (Cochran l. c.). Det er da forutsatt at vektene (w_i) er omvendt proporsjonale med de sanne residualvariansene. Dette uttrykket kan omformes til $1/(1 + c^2)$ hvor c er variasjonskoeffisienten for residualvariansen. (Hos Cochran (l.c.) er det antakeligvis en trykkfeil idet formelen er gitt som $1/(1 + c)$. Sukhatme (l.c.) har derimot skrevet formelen slik som angitt.)

Sukhatme (l.c.) angir at det andre leddet i parentesen i formel (6–4) er av størrelsesorden $1/n$ i forhold til det første. Dette vil som regel ikke være



Figur 6.1. Utjevning av $\frac{\pi}{4}$ *hf* ved formel (6–5), flate nr. 1.

Figure 6.1. Smoothing $\frac{\pi}{4}$ *hf by formula (6–5), sample plot No. 1.*

tilfelle. Det andre leddet er et uttrykk for forskjellen mellom et veiet og et uveiet middeltall. Denne forskjellen vil holde seg noenlunde konstant, uavhengig av utvalgets størrelse. I nevneren i det andre leddet inngår en veiet varians. Denne vil også holde seg omtrent konstant med økende *n*. Når en derfor ser bort fra det andre leddet, betyr det at en overvurderer effektiviteten av en veiet regresjonsestimator. Selv om en tar hensyn til dette forholdet, vil en imidlertid ofte finne at en veiet regresjonsestimator kan være atskillig mer effektiv enn en uveiet. Men dette gjelder ikke alltid.

Den modellen som er brukt ved kubering etter *dhf*-linjen, $v = b_1 d + b_2 d^2$, inneholder intet konstantledd. Som vist i avsnitt 5.3.2, har det ingen effekt om en bruker en veiet estimator. Vektene var i dette tilfelle omvendt proporsjonale med d^2. Det kan innvendes at det ville vært bedre å bruke vekter som var omvendt proporsjonale med d^4, fordi residualvariansen for høydekurven synes å være omtrent konstant. Brukes den samme utjevningsfunksjonen ($v = b_1 d + b_2 d^2$), vil det si det samme som at en bruker en „*hf*-kurve"

$$\frac{\pi}{4} hf = b_1 \frac{1}{d} + b_2. \tag{6–5}$$

Det viser seg imidlertid at denne kurven gjennomgående gir en dårlig utjevning. I figur 6.1 er vist et eksempel på dette. Når utjevningen er dårlig, vil den beregnete residualvariansen bli for stor. Dette forplanter seg videre til variansen for kubikkmassen. I det hele tatt får spørsmålet om valg av funksjonstype større og større betydning jo mer ulike vekter en gir de enkelte observasjonene.

For å få en bedre utjevning av *hf*-verdiene kan brukes en funksjon som er mer „smidig" enn formel (6–5), f. eks.:

$$\frac{\pi}{4} hf = b_1 + b_2 d + b_3 d^2. \tag{6–6}$$

Når den samlete kubikkmassen skal estimeres, skjer det i så fall ved estimatoren

$$V = b_1 \overset{N}{\Sigma} d^2 + b_2 \overset{N}{\Sigma} d^3 + b_3 \overset{N}{\Sigma} d^4. \tag{6–7}$$

Feilvariansen er

$$\sigma^2(V_{hf}) = \sum_{k,l}^{3} (\overset{N}{\Sigma} d^{k+1}) (\overset{N}{\Sigma} d^{l+1}) \operatorname{cov}(b_k b_l) \tag{6–8}$$

hvor $\operatorname{cov}(b_k b_k) = \sigma^2(b_k)$.

$\sigma^2(b_1)$ finnes ved

$$\Delta b_1 = \frac{\begin{vmatrix} S(\frac{1}{d^4}\,\varepsilon\, d^2) & S\,d & S(d^2) \\ S(\frac{1}{d^4}\,\varepsilon\, d^3) & S(d^2) & S(d^3) \\ S(\frac{1}{d^4}\,\varepsilon\, d^4) & S(d^3) & S(d^4) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S\,d & S(d^2) \\ S\,d & S(d^2) & S(d^3) \\ S(d^2) & S(d^3) & S(d^4) \end{vmatrix}} \tag{6–9}$$

hvor ε er „feilen" i kubikkmasse, idet

$$\sigma^2(b_1) = E\,\{(\Delta b_1)^2\} \tag{6–10}$$

med tilsvarende uttrykk for b_2 og b_3.

Forutsettes at $NSd^k = n\Sigma d^k$ hvor $k = 1, 2, 3$ eller 4, finner en etter endel regning at

$$\sigma^2(V_{hf}) = \frac{N^2}{n}\sigma^2(v) \tag{6–11}$$

hvor $\sigma^2(v)$ er den gjennomsnittlige residualvariansen for kubikkmassen. Hvis prøvetrefordelingen avviker noe fra bestandets fordeling, blir ikke forholdet vesentlig endret, hvis ikke forskjellen mellom fordelingene er for stor. I det hele tatt er en uveiet estimator av typen

$$Y = \overset{N}{\Sigma}[b_1 d^k + b_2 d^{k+1} + \cdots] \tag{6–12}$$

like effektiv som en veiet estimator med vekter omvendt proporsjonale med d^{2k}. Dette resultatet virker ganske forbausende. På grunnlag av Markoffs teorem vet en at en veiet estimator er mest effektiv (David og Neyman 1938). Men i det spesielle tilfelle som diskuteres her, er den ikke mer effektiv enn en uveiet regresjonsestimator. Forholdet er med andre ord det samme som en har mellom en brøkestimator og en regresjonsestimator for modellen

$$y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i. \tag{6–13}$$

Når en bruker vekter ved beregningen, oppnås stort sett det samme resultat som når en velger utvalgsenhetene med sannsynlighet proporsjonal med vektene. Hvis en bruker en modell f. eks. av typen

$$y = b_1 d + b_2 d^2 + \cdots \tag{6–14}$$

er innført den betingelsen at regresjonskurven skal passere gjennom origo. Ved å forskyve fordelingen av den (eller de) uavhengige variable i retning mot origo, oppnås ingen øket effekt. Riktignok vil variasjonen i den avhengig variable bli mindre jo nærmere en kommer origo. Men dette hjelper lite fordi „feilene" blir multiplisert opp igjen når en regner ut det endelige resultat.

Kubering etter høydekurven $h = b_1 + b_2 d + b_3 d^2$ vil gi praktisk talt samme resultat som kubering etter „*hf*-kurven" (formel 6–6). Det er ut fra det foregående naturlig at kubering etter høydekurven ikke gir noe vesentlig bedre resultat enn kubering etter *dhf*- eller masselinje.

Kubering ved tariff og brøkestimator har gitt omtrent samme resultat som kubering etter masselinje eller *dhf*-linje. I gjennomsnitt er middel-

feilen 4,0 %. Dette resultat er forsåvidt ganske rimelig. En brøkestimator slik som angitt her, vil være mest effektiv under to forutsetninger: 1) Regresjonen mellom virkelig kubikkmasse og tariffkubikkmasse er lineær og går gjennom origo. 2) Residualspredningen for virkelig kubikkmasse er proporsjonal med kvadratroten av tariffkubikkmassen (se f. eks. COCHRAN 1953). Ingen av disse forutsetningene gjelder i virkeligheten. Regresjonen mellom de to kubikkmassene avviker for enkelte flater en god del fra origo. Residualspredningen er omtrent proporsjonal med tariffkubikkmassen (og ikke med kvadratroten av tariffkubikkmassen).

Kubering ved *sps*-utvalg, idet tariffkubikkmassen brukes som mål på størrelsen, har gitt godt resultat. I gjennomsnitt er middelfeilen ved bruk av 20 prøvetrær 3,2 %. Det er av en viss interesse å sammenlikne denne kuberingsmåten med kubering ved stratifisert utvalg.

Variansen for kubikkmassen ved dette *sps*-utvalget er

$$\sigma^2(V_{sps-t}) = \frac{NT}{n(N-1)} \sum_{}^{N} t_i \left(\frac{v_i}{t_i} - \bar{r}\right)^2 \qquad (6\text{–}15)$$

hvor $\bar{r} = \Sigma v / \Sigma t$ og $T = \sum_{}^{N} t$. For et stratifisert utvalg med prøvetrærne fordelt proporsjonalt med tariffkubikkmassene innen strataene, er feilvariansen

$$\sigma^2(V_{str-t}) = \frac{T}{n} \sum_{}^{k} N_k^2 \frac{\sigma^2(v)_k}{T_k} \qquad (6\text{–}16)$$

hvor $\sigma^2(v)_k$ er variansen i kubikkmasse og T_k er samlet tariffkubikkmasse innen stratum k.

For en bestemt diameter er verdien av $t_i\,[(v_i/t_i) - \bar{r}]^2$ lik $1/t_i \cdot (v_i - rt_i)^2$. Hvis forholdet v/t i gjennomsnitt er konstant fra diameterklasse til diameterklasse, er $1/t_i \cdot (v_i - \bar{r}t_i)^2$ omtrent lik $\sigma^2(v_i)/t_i$ hvor $\sigma^2(v_i)$ er varians i kubikkmasse. Settes dette inn i formel (6–15), går denne formelen over til

$$\sigma^2(V_{sps-t}) \doteq \frac{NT}{n(N-1)} \sum_{}^{N} \frac{\sigma^2(v_i)}{t_i} \doteq \frac{T}{n} \sum_{}^{k} N_k^2 \frac{\sigma^2(v)_k}{T_k}. \qquad (6\text{–}17)$$

Av dette følger at hvis forholdet v/t i gjennomsnitt er konstant over hele variasjonsområdet, vil et *sps*-utvalg gi samme nøyaktighet som stratifisert utvalg med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med tariffkubikkmassen. Denne kuberingsmåten er ikke undersøkt nærmere. Men i og med at det er henimot direkte proporsjonalitet mellom tariffkubikkmasse og grunnflate, kan en regne med at stratifisert utvalg med fordeling

proporsjonalt med tariffkubikkmassen vil gi praktisk talt samme resultat som stratifisert utvalg med fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen. Når det viser seg at *sps*-utvalget gir noe større middelfeil enn stratifisert utvalg med fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen, skyldes dette at forholdet v/t varierer endel. For noen bestand er det tydelig tendens til avtagende forhold med stigende diameter, for andre bestand kan det være omvendt.

Sps-utvalg, med tariffkubikkmassen som mål på størrelsen, gir noe bedre resultat enn bruk av brøkestimator med tilfeldig fordeling av prøvetrærne. Dette er forsåvidt rimelig. Som påvist av Cochran (1953), vil et *sps*-utvalg være mer effektivt hvis variansen i virkelig kubikkmasse for en bestemt diameter er proporsjonal med t^g, hvor $g > 1$. Det er grunn til å anta at g i virkeligheten er et tall i nærheten av 2. På grunnlag av denne diskusjonen må en også kunne gå ut fra at det er bedre å bruke et *sps*-utvalg med tariffkubikkmassen som mål på størrelsen enn å bruke Lethpere's framgangsmåte som kan betraktes som bruk av en vanlig brøkestimator (Lethpere 1958).

Kubering ved hjelp av middelstammer eller ved bestandsvolumtabell gir gjennomgående de unøyaktigste resultatene for et bestemt prøvetreantall. Dette skyldes i første rekke at disse metodene gir estimater som er beheftet med forventningsskjevhet. Den generelle forventningsskjevheten vil som regel kunne elimineres, men ikke den spesielle.

For tre av metodene (kubering etter bestandsvolumtabell, grunnflatemiddelstamme og tariffmiddelstamme) er middelavviket for differensen mellom virkelig og beregnet kubikkmasse av størrelsesorden 5 %. Regnes med normal fordeling, vil dette si at en må regne med en spesiell forventningsskjevhet på 5 % eller større i ca. ett av tre tilfelle. Dette betyr at forventningsskjevheten er så stor at metodene bare bør brukes i tilfelle hvor det er om å gjøre å foreta raske kuberinger.

Kubering etter Hohenadl's middelstammer gir noe bedre resultat. Når kubikkmassen for de to middelstammene ble bestemt ved høydekurven, ga metoden relativt liten feil. Middelavviket for differensen mellom virkelig og beregnet kubikkmasse var 3,6 %. Den spesielle forventningsskjevheten synes å være såpass liten at det er spørsmål om metoden ikke bør få større anvendelse enn den har fått hittil.

Vurdert ut fra nøyaktigheten faller kuberingsmetodene i to grupper. Den ene gruppen omfatter metoder som gir estimater som er forventningsrette, eller estimater med så liten forventningsskjevhet at den kan neglisjeres. Gruppen omfatter metodene: Kubering etter stratifisert utvalg, høydekurve, masselinje, *dhf*-linje og tariff (brøkestimator og *sps*-utvalg). Den andre gruppen omfatter kubering etter grunnflatemiddelstamme,

tariffmiddelstamme og bestandsvolumtabell. Kubering ved Hohenadl's middelstammer faller mellom de to gruppene.

Valget av den kuberingsmåte som skal brukes i et aktuelt tilfelle, vil for en stor del avhenge av hvilken kubikkmasse som skal bestemmes. Hvis kubikkmassen for den enkelte prøveflate har interesse, er det naturlig å bruke en av kuberingsmetodene i den første gruppen. Velges stratifisert utvalg, er det naturlig å fordele prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen i de enkelte strata. Denne kuberingsmetoden synes i det hele tatt å være de andre overlegen. De øvrige kuberingsmetodene i den første gruppen synes å være noenlunde likeverdige hva nøyaktighet angår.

Hvis prøveflatene vesentlig tjener som et hjelpemiddel for bestemmelsen av kubikkmassen for et større område (f. eks. en bestandsklasse eller en hel skog), vil kuberingen som regel bli foretatt samlet for alle prøveflatene under ett. Også i dette tilfelle vil en bruke en av kuberingsmetodene i den første gruppen.

Kuberingsmetodene i den andre gruppen har vesentlig interesse der hvor kuberingen må foretas relativt raskt, eller der hvor en både er interessert i estimater for små enheter (prøveflater, bestand) og for store enheter (bestandsklasser, en hel skog). Estimatene for de små enhetene vil på grunn av den spesielle forventningsskjevheten kunne bli beheftet med ganske store feil.

Ofte skal tilvekstmassen bestemmes i tillegg til kubikkmassen. I slike tilfelle vil valget av kuberingsmetode i noen grad influeres av dette. Det gjelder å bruke en metode som lar seg kombinere lettvint med en metode for beregning av tilvekstmassen med ønsket nøyaktighet.

7. Bestemmelse av tilveksten.

Et bestands tilvekst er ikke et entydig begrep, idet det kan bety tilvekst for en svunnen periode eller (antatt) tilvekst for en kommende periode. Det må derfor presiseres hvilken periode en beregnet tilvekst gjelder for. I praksis må den beregnes som en periodisk middeltilvekst.

Den tilveksten som er avsatt i en svunnen periode kan måles direkte. For å få en fullstendig tilvekstbestemmelse, må kubikkmassen av de trærne som eventuelt er felt i perioden, være kjent.

Tilveksten for de trærne som står igjen ved periodens slutt, kan bestemmes ved måling av årringbredde og toppskuddlengde. Det er blitt vanlig praksis å bruke en 10-års periode for bestemmelse av tilveksten, og denne periodelengden er brukt i det følgende.

I mange forbindelser (f. eks. ved utarbeidelse av driftsplaner) knytter interessen seg særlig til tilveksten for en kommende periode. For å kunne forutsi denne tilvekststørrelsen må en bygge på bestemte antakelser. For en hel skogeiendom er det f. eks. ikke urimelig å gå ut fra at tilveksten for en kommende periode vil være lik tilveksten for en svunnen periode hvis hogstene er rimelige. Tilveksten for en svunnen periode kan bestemmes ganske nøyaktig for de trærne som gjenstår ved periodens slutt, men for å få rede på hele tilveksten må det gjøres et tillegg for den tilveksten som er avsatt på trær som er felt i løpet av tilvekstperioden. Det er dette moment som er en av grunnene for sløyfingen av korreksjonsleddet når tilveksten bestemmes ved Jonsons formel.

I Norge og Sverige synes det å være slik at tilveksten nesten alltid blir direkte bestemt ved måling av tilvekstdataene ute i marken. I USA har en tildels slått inn på andre veier. En har f. eks. forsøkt å finne regresjonslikninger som gir tilveksten som funksjon av forskjellige bestandskjennetegn. Den tilveksten en søker å komme fram til på denne måten, er som regel tilveksten for en kommende periode (sml. Nyyssönen 1956 a).

Foruten tilveksten for en svunnen eller kommende periode kan en i noen tilfelle være interessert i tilveksten „nå" (Langsæter 1944). Denne kan defineres som den løpende tilveksten, korrigert for klimapåvirkning, slik at den skal gjelde for et år som er normalt i klimatisk henseende.

Hvilken tilvekst som er av størst interesse, avhenger av hva tilvekstoppgavene skal brukes til. I noen tilfelle knytter interessen seg særlig til tilveksten for en svunnen periode, i andre tilfelle til tilveksten for en kommende periode.

Bortsett fra undersøkelser av vitenskapelig karakter foretas tilvekstbestemmelsen hos oss som regel ved engangsmåling (av årringbredde og toppskuddlengde). I dette tilfelle blir den tilveksten som er avsatt på de trærne som gjenstår ved periodens slutt, bestemt direkte. Det er derfor naturlig å behandle denne tilveksten først. Senere kan en drøfte tilveksten på trær som er felt i perioden, og tilveksten for kommende periode.

Tilveksten kan spaltes i to komponenter:

$$i_v \doteq i_g \cdot fh + i_{fh} \cdot g \qquad (7\text{–}1)$$

hvor i_v, i_g og i_{fh} er tilvekst i kubikkmasse, grunnflate og formhøyde. Formel (7–1) kan gjelde for et enkelt tre eller for et bestand. Som regel vil det første leddet (som inneholder grunnflatetilveksten) dominere. Formhøydetilveksten er vanskelig å måle og av den grunn er det utviklet flere metoder som gir volumtilveksten direkte som funksjon av grunnflatetilveksten. Det er hensiktsmessig å behandle grunnflate-, formhøyde- og volumtilveksten hver for seg.

7.1 *Grunnflatetilveksten.*

Den årlige grunnflatetilveksten er definisjonsmessig

$$i_g = \frac{g_0 - g_{-10}}{10} \qquad (7.1\text{–}1)$$

hvor g_0 er grunnflaten ved målingstidspunktet og g_{-10} er grunnflaten 10 år tidligere.

Hvis grunnflatetilveksten skal inkludere barktilveksten, må begge grunnflater angis med bark. Når tilveksten bestemmes ved boring, må derfor barktykkelsen for 10 år siden estimeres. Dette kan gjøres under forskjellige forutsetninger: 1) Det forutsettes at barkprosenten (for diameter eller grunnflate) holder seg konstant. Denne forutsetningen er brukt bl. a. av MEYER (1942), SPURR (1952) og LOETSCH (1953). 2) Det forutsettes at regresjonen mellom barktykkelse og diameter har holdt seg uforandret. 3) Det brukes „standardkurver" for barktykkelsen. Denne framgangsmåten har vært brukt bl. a. av BRAATHE (1953 a) som brukte barkkurvene fra den norske produksjonstabellen for gran (EIDE og LANGSÆTER 1941).

For de 42 flatene ble grunnflatetilveksten beregnet med bark. Dette ble gjort bl. a. fordi det var av interesse å sammenlikne den virkelige tilveksten med tilveksten beregnet ved hjelp av en funksjon som gir tilvekst med bark (sml. avsnitt 7.5). Korreksjonsmåte 2 ble brukt.

Hvis trærne er i noenlunde god vekst, vil en feilestimering av barktykkelsen for 10 år siden ikke spille noen vesentlig rolle for nøyaktigheten ved bestemmelse av grunnflatetilveksten. Den prosentiske feilen for grunnflatetilveksten for ett tre, $\Delta i_{g\%}$, ved en bestemt feil for barktykkelsen, $\Delta b_{\%}$, kan skrives:

$$\Delta i_{g\%} \approx [100 - \Delta b_{\%} \frac{b}{10\, i_d}] \qquad (7.1\text{–}2)$$

hvor i_d er diametertilveksten med bark. Av formel (7.1 -2) følger at hvis 10 års diametertilvekst er omtrent lik barktykkelsen, vil en bestemt feil på ansettelsen av barktykkelsen gi en like så stor (prosentisk) feil på grunnflatetilveksten, med motsatt fortegn. Er diametertilveksten større enn barktykkelsen, vil den prosentiske feilen på grunnflatetilveksten bli mindre enn den prosentiske feilen på barktykkelsen.

For alle flatene unntagen én er den gjennomsnittlige tiårige diametertilveksten større enn den gjennomsnittlige barktykkelsen ved målingstidspunktet. Sammenhengen mellom barktykkelse og diameter er også god, slik at en får liten residualspredning når en bruker en lineær regresjon mellom barktykkelse og diameter. Hvis derfor regresjonsfunksjonen

har vært uforandret i tilvekstperioden, vil feilen på grunnflatetilveksten på grunn av feil på barktykkelsen bli helt minimal. Men selv om regresjonsfunksjonen har undergått en liten forskyvning, vil den feilen dette medfører for grunnflatetilveksten spille underordnet rolle.

Da det alltid vil være endel variasjon i barktykkelsen fra område til område, synes det bedre å beregne barktykkelsen (og endringer i denne) ut fra de aktuelle forholdene på flaten istedenfor å bruke erfaringstall (standardkurver).

Treets tverrsnitt er sjelden sirkelformet. Når grunnflaten bestemmes som om tverrsnittet er en sirkel, oppstår en feil som dels er av tilfeldig, dels av systematisk karakter (Tirén 1929, Matérn 1956). Dette får også betydning for grunnflatetilveksten. I tillegg kommer et annet forhold, nemlig at årringbredden veksler i forskjellige retninger innen samme tre (Keylwerth 1954). Denne variasjonen i årringbredde „innen trær" vil imidlertid være atskillig mindre enn variasjonen „mellom trær", selv om en holder seg til trær innen samme diameterklasse. Det vil derfor som regel ikke være særlig effektivt å ta to eller flere målinger av årringbredden på hvert tre. Det er bedre å få målt så mange trær som mulig (sml. Loetsch 1953).

Gjennomgående vil variasjonskoeffisienten for grunnflatetilveksten være større enn variasjonskoeffisienten for årringbredden. Men hvis en holder seg til bestemte diameterklasser og undersøker variasjonen innen klassen, vil variasjonskoeffisientene for de to tilvekststørrelsene være av samme størrelsesorden.

Det foreligger endel undersøkelser over variasjonen i årringbredde eller grunnflatetilvekst, som alle viser at det kreves et stort prøvetrematerialе hvis tilveksten skal bestemmes med feil under 5 %.

Langsæter (1934) undersøkte variasjonen i årringbredde for takstmateriale for endel skogeiendommer. Variasjonskoeffisienten for årringbredden innen diameterklassene (intervall 10 cm) viste en svak stigning med skogens areal og med gjennomsnittlig årringbredde, men et svakt fall med diameterklassen. For skoger av størrelsesorden 100 ha var variasjonskoeffisienten stort sett mellom 40 og 50 %.

Loetsch (1956) undersøkte et takstmateriale av furu. Etter stratifisering på alders- og diameterklasser var variasjonskoeffisienten for grunnflatetilveksten i gjennomsnitt 38 %. Intervallet for diameterklassene var 10 cm og for aldersklassene 20 år. Det var en svak tendens til stigende variasjonskoeffisient med stigende diameter.

Trampler og Sikora (1956) angir at variasjonskoeffisienten for årringbredden innen et bestand synes å være av samme størrelsesorden som variasjonskoeffisienten for massetilveksten. På grunnlag av en rekke

prøveflater ble variasjonskoeffisientene for massetilveksten i gjennomsnitt bestemt til 44 %. Det viste seg å være liten forskjell på gran- og edelgranbestand. Det går ikke klart fram av teksten hvorvidt den variasjonskoeffisienten som er oppgitt gjelder den totale variasjonskoeffisienten (som i så fall synes å være ganske liten) eller den gjennomsnittlige variasjonskoeffisienten innen strata.

Gieruszunski (1956) angir at den totale variasjonskoeffisienten for årringbredden innen 3 granbestand var 60 %, mot 25 % innen diameterklasser.

Så lenge en holder seg til bestand som er noenlunde ensaldrete, synes det å være en lineær sammenheng mellom diametertilvekst og diameter (Krenn 1941, Meyer 1942, Möller 1946). Som regel kan også sammenhengen mellom grunnflatetilvekst og grunnflate gjengis ved en lineær regresjon.

Sammenhengen mellom diametertilvekst og diameter kan skrives

$$i_d = b_1 + b_2 d. \tag{7.1–3}$$

Hvis formel (7.1–3) skal brukes til bestemmelse av grunnflatetilveksten, må det multipliseres på begge sider av likhetstegnet med $\pi/2 \cdot d$ og summeres over alle trær i bestandet:

$$I_g = b_1 \frac{\pi}{2} (\overset{N}{\Sigma} d) + b_2 \frac{\pi}{2} (\overset{N}{\Sigma} d^2). \tag{7.1–4}$$

En beregner da grunnflatetilveksten ved nærmingsformelen

$$i_g \doteq \frac{\pi}{2} d\, i_d. \tag{7.1–5}$$

I mange tilfelle vil det estimatet en får for den samlete grunnflatetilveksten etter formel (7.1–4), ligge atskillig høyere enn den verdien en får ved direkte estimering (f. eks. ved bruk av stratifisert utvalg). For å eliminere den systematiske feilen en får ved bruk av formel (7.1–4), kan en bruke en mer fullstendig formel:

$$I_g = b_1 \frac{\pi}{2} (\overset{N}{\Sigma} d) + b_2 \frac{\pi}{2} (\overset{N}{\Sigma} d^2) - \frac{N}{n} \frac{\pi}{4} S(i_d^2) \tag{7.1–6}$$

hvor $S(i^2{}_d)$ er summen av kvadratene av de observerte diametertilvekstene for prøvetrærne. Det er en forutsetning for bruk av formel (7.1–6) at prøvetrærne er fordelt på en slik måte at forventningsverdien for $N\,S(i_d^2)$ er lik $n \overset{N}{\Sigma}(i_d^2)$.

Brukes sammenhengen mellom grunnflatetilvekst og grunnflate

$$i_g = b'_1 + b'_2 g \tag{7.1–7}$$

til estimering av den samlete grunnflatetilveksten, skjer det ved formelen

$$I_g = N\, b'_1 + b'_2\, G. \tag{7.1–8}$$

Det kan også være aktuelt å bruke et *sps*-utvalg for å estimere den samlete grunnflatetilveksten. Brukes grunnflaten som mål for størrelsen, finnes tilveksten ved formelen

$$I_g = \frac{1}{n} S\left(\frac{i_g}{g}\right) G = \frac{1}{100}\, \bar{p}_g \cdot G \tag{7.1–9}$$

hvor $\bar{p}_g$ er det aritmetiske gjennomsnitt av grunnflatetilvekstprosenten for de prøvetrærne som er valgt ut.

Den vanligste framgangsmåten for bestemmelse av grunnflatetilveksten hos oss er å bruke en modifisert form av et stratifisert utvalg. Grunnflatetilvekstprosenten for de enkelte diameterklasser beregnes på grunnlag av midlere diameter og årringbredde. Forskjellen fra et vanlig stratifisert utvalg er derfor at en bruker gjennomsnittlig årringbredde istedenfor gjennomsnittlig grunnflatetilvekst. Med trange diameterklasser vil det ikke være noen vesentlig forskjell på disse to beregningsmåtene.

I tabell 7.1 er gjengitt de beregnete grunnflatetilvekstene for de 42 flatene. For stratifisert utvalg er brukt 5 cm diameterklasser. I samme tabell er også gjengitt residualspredningene for diametertilveksten (formel 7.1–3) og for grunnflatetilveksten (formel 7.1–7). De prosentiske verdiene for de to spredningene varierer noenlunde i takt fra flate til flate. Når samvariasjonen ikke er sterkere, henger det sammen med det forholdet at residualspredningen for grunnflatetilveksten er sterkt avhengig av hvordan residualspredningen for årringbredden varierer med diameteren. Er det en tendens til at residualspredningen for årringbredden øker med diameteren, vil residualspredningen for grunnflatetilveksten bli relativt stor.

Brukes formel (7.1–8) til estimering av grunnflatetilveksten, er estimatet for feilvariansen gitt ved

$$V(I_g) = s^2(i_g)\,[N^2 c'_{11} + 2Gc'_{12} + G^2 c'_{22}] \tag{7.1–10}$$

hvor c'_{ij} er elementet i matriksen

Tabell 7.1. Grunnflatetilvekst (m^2/ha) med bark, og residualspredning.
Basal area increment (sq.m.per ha) incl. bark increment, and standard deviation of residuals.

Flate nr. *Plot No.*	Grunnflatetilvekst *Basal area increment*			Residualspredning *Standard deviation of residuals*			
	Formel *Formula*		Strat. utv. *Strat. sampling*	Formel *Formula*			
	(7.1–6)	(7.1–8)		(7.1–3)		(7.1–7)	
	m^2/ha	m^2/ha	cm^2	mm	%	cm^2	%
1	0,72	0,78	0,75	2,01	37,6	6,7	42,9
2	0,65	0,67	0,68	0,72	33,0	2,2	31,3
3	0,65	0,65	0,65	1,31	30,8	5,7	38,5
4	0,73	0,79	0,79	1,04	34,9	1,6	51,1
5	1,28	1,28	1,42	0,79	40,9	0,9	36,5
6	0,60	0,62	0,63	0,69	33,5	2,3	35,7
7	0,47	0,51	0,51	0,60	36,4	1,2	40,6
8	0,57	0,57	0,60	1,33	39,7	5,6	50,2
9	0,75	0,78	0,75	1,12	35,3	5,0	34,3
10	0.95	0,99	0,99	1,44	45,3	6,1	46,7
11	0,56	0,56	0,53	0,66	28,9	2,4	28,5
12	0,55	0,58	0,53	0,56	28,0	2,5	35,2
13	0,67	0,67	0,68	0,88	32,0	2,5	25,9
14	0,39	0,41	0,37	0,59	34,5	2,4	37,8
15	0,85	0,97	0,82	1,01	41,4	2,7	51,4
16	0,34	0,35	0,33	1,76	53,2	2,8	54,6
17	0,49	0,53	0,49	1,57	38,9	3,8	49,7
18	0,36	0,39	0,37	1,67	45,0	6,0	73,2
19	0,56	0,61	0,57	1,26	35,9	4,2	55,7
20	1,32	1,42	1,34	1,76	25,3	3,3	26,5
21	0,95	1,00	0,96	1,89	51,1	7,3	61,0
22	0,93	1,03	0,94	1,69	44,5	7,0	52,4
23	0,57	0,57	0,57	1,79	45,5	7,1	50,4
24	1,46	1,62	1,54	1,68	33,7	4,3	42,3
25	1,02	1,06	1,04	1,86	49,7	6,7	52,8
26	0,35	0,36	0,35	1,33	50,0	2,8	49,0
27	0,18	0,20	0,20	0,94	44,5	3,0	42,4
28	0,14	0,16	0,16	0,45	50,0	1,1	48,5
29	0,22	0,24	0,24	0,97	50,5	2,5	45,3
30	0,42	0,44	0,44	1,06	40,2	4,5	47,1
31	0,45	0,46	0,46	1,34	66,0	5,3	68,1
32	0,48	0,50	0,50	1,40	42,6	5,1	42,8
33	0,74	0,73	0,71	1,37	35,7	1,6	36,6
34	1,21	1,24	1,16	1,14	32,1	2,2	32,4
35	0,97	0,98	0,96	1,54	35,4	2,2	28,0
36	0,21	0,23	0,22	0,68	50,0	2,1	49,8
37	0,23	0,24	0,24	0,66	36,5	2,4	34,1
38	0,25	0,25	0,25	1,70	62,3	2,9	48,3
39	0,53	0,53	0,56	1,45	49,5	2,3	53,6
40	0,66	0,65	0,70	1,36	33,0	1,4	21,7
41	0,42	0,44	0,43	2,15	57,2	8,1	51,8
42	0,72	0,70	0,72	1,31	30,4	1,8	34,4

$$\begin{Vmatrix} n & Sg \\ Sg & Sg^2 \end{Vmatrix}^{-1} \equiv \begin{Vmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{Vmatrix} \qquad (7.1\text{–}11)$$

og $s^2(i_g)$ er residualvariansen for grunnflatetilveksten.

Den feilen en ville fått ved *sps*-utvalg med grunnflaten som mål for størrelsen, beregnes ved formelen

$$V(I_g) = \frac{NG}{n(n-1)}\left[S\left(\frac{p_g i_g}{100} - \frac{\{S(i_g)\}^2}{Sg}\right)\right] \qquad (7.1\text{–}12)$$

når prøvetrærne i virkeligheten er valt ut tilfeldig.

For et stratifisert utvalg med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen kan feilvariansen estimeres ved formelen

$$V(I_g) = \frac{G}{n} \sum^{k} N_k^2 \frac{s^2(i_g)_k}{G_k} \qquad (7.1\text{–}13)$$

hvor $s^2(i_g)_k$ i dette tilfelle angir variansen for grunnflatetilveksten innen diameterklasse k. Langsæter (1934) har drøftet den optimale prøvetrefordelingen for estimering av grunnflatetilveksten. Fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen ga i ett tilfelle en relativ effektivitet på 90 % i forhold til optimal fordeling, mens fordeling etter treantallet ga en relativ effektivitet på 76 %. Av den grunn ble her forsøkt fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen idet et slikt fordelingsprinsipp må legges til grunn i praksis.

Middelfeilen for de forskjellige estimeringsmåtene er gjengitt i tabell 7.2, idet det er regnet med 20 prøvetrær. Det er forutsatt tilfeldig prøvetrefordeling for regresjonsestimatoren, fordeling proporsjonalt med grunnflaten for *sps*-utvalg og stratifisert utvalg.

Beregningene er foretatt direkte etter formlene på grunnlag av årringbredder som er korrigert ved hjelp av regresjonskurver så de også skal omfatte barktilvekst. De beregnete feilene, spesielt de prosentiske verdiene, vil stort sett også svare noenlunde til middelfeilene ved bestemmelse av tilvekst uten bark.

Det framgår av tabellen at middelfeilen for grunnflatetilveksten blir minst når det brukes stratifisert utvalg. I gjennomsnitt er denne middelfeilen 8,0 % mot 8,8 % for *sps*-utvalg, og 9,8 % for formel (7.1–8). Middelfeilen for stratifisert utvalg er beregnet på grunnlag av 5 cm diameterklasser. Ved bruk av trangere klasser, f. eks. 2 cm intervall, vil middelfeilen bli litt mindre. På den annen side medfører dette endel ulemper ved at en lettere kommer ut for den situasjon av det mangler prøvetrær fra en eller flere diameterklasser.

Stratifisert utvalg har gitt den minste middelfeilen. Middelfeilen for

Tabell 7.2. Middelfeil på grunnflatetilveksten ved bruk av 20 prøvetrær.
Standard error of the basal area increment by the use of 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Regresjonsestimator *Regression estimator* $i_g = b_1 + b_2 g$		Sps-utvalg «*PPS*»-*sampling* $\propto g$		Stratifisert utvalg 5 cm diameterklasser *Stratified sampling 5 cm diameter classes*	
	m²/ha	%	m²/ha	%	m²/ha	%
1	0,075	9,6	0,086	11,5	0,063	8,4
2	47	7,0	43	6,3	42	6,2
3	56	8,6	59	9,1	44	6,8
4	91	11,5	57	7,2	55	7,0
5	104	8,1	93	6,5	109	7,7
6	50	8,1	39	6,2	42	6,7
7	46	9,0	42	8,2	46	9,0
8	64	11,2	54	9,0	41	6,8
9	60	7,7	54	7,2	50	6,7
10	104	10,5	88	8,9	87	8,8
11	36	6,4	34	6,4	39	7,4
12	45	7,8	33	6,2	35	6,6
13	39	5,8	48	7,1	43	6,3
14	33	8,0	32	8,6	28	7,6
15	112	11,5	77	9,4	63	7,7
16	42	12,0	46	13,9	38	11,5
17	59	11,1	50	10,2	31	6,3
18	63	16,2	40	10,8	39	10,5
19	73	12,0	63	11,1	55	9,6
20	84	5,9	75	5,6	88	6,6
21	136	13,6	96	10,0	66	6,9
22	121	11,7	81	8,6	59	6,3
23	65	11,4	40	7,0	20	3,5
24	154	9,5	104	6,8	78	5,1
25	125	11,8	93	8,9	73	7,0
26	39	10,8	46	13,1	35	10,0
27	19	9,5	21	10,5	19	9,5
28	17	10,6	10	6,3	18	11,3
29	25	10,4	26	10,8	24	10,0
30	46	10,5	39	8,9	35	8,0
31	70	15,2	66	14,3	58	12,6
32	48	9,6	44	8,8	44	8,8
33	60	8,2	55	7,7	55	7,7
34	90	7,3	67	5,8	77	6,6
35	61	6,2	45	4,7	41	4,3
36	26	11,3	30	13,6	25	11,4
37	18	7,5	20	8,3	19	7,9
38	27	10,8	26	10,4	29	11,6
39	63	11,9	66	11,8	60	10,7
40	32	4,9	37	5,3	41	5,9
41	52	11,8	61	14,2	43	10,0
42	54	7,7	41	5,7	57	7,9

sps-utvalg med grunnflaten som mål for størrelsen, har gitt noe større feil. Forskjellen er imidlertid ikke stor. I praksis faller det noe enklere å bruke *sps*-utvalg enn stratifisert utvalg. Middelfeilene for regresjonsestimatoren er igjen noe større enn for *sps*-utvalg.

Det må tas ganske mange prøvetrær hvis grunnflatetilveksten skal bestemmes med noenlunde sikkerhet. Dette gjelder ikke bare når tilveksten skal bestemmes for større områder, men også for prøveflater. Selv om en bruker en av de nøyaktigste metodene blir feilen relativt stor hvis en bruker bare 20 prøvetrær. For de 42 prøveflatene varierer middelfeilen ved bruk av stratifisert utvalg mellom 12,6 % og 3,5 %, med et gjennomsnitt på 8,0 %. Ønsker en derfor å bestemme grunnflatetilveksten med en feil på omkring 3 %, må antall prøvetrær være av størrelsesorden 100, hvis ikke det samlete treantallet er så lite at korreksjonsfaktoren for endelig populasjon får en viss betydning.

7.2 *Formhøydetilveksten.*

Bestemmelse av formhøydetilveksten er et av de vanskeligste punkter ved tilvekstmåling på stående trær. Formhøydetilveksten må bestemmes indirekte ut fra høydetilveksten fordi en ikke kan observere tilveksten i formtallet.

Det er vanlig å bestemme høydetilveksten som gjennomsnittslengden av de siste 5 eller 10 toppskudd. Når denne ansettelsen må foregå fra bakken, er det vanskelig å unngå målefeil. Målefeilen skyldes dels at det blir tellet galt antall toppskudd, dels at lengden av det antatte stykke av toppen ikke blir bestemt riktig. Ved bruk av instrumenter kan målefeilen til en viss grad elimineres.

Solbraa (1937) undersøkte hvilke feil en fikk ved skjønnsmessig ansettelse av toppskuddlengden. Det viste seg å være en tydelig tendens til systematiske feil. Store toppskudd ble ansatt for lavt, små toppskudd for høyt. Trehøyden synes å ha en viss betydning idet toppskuddet ble ansatt for lavt på lave trær og for høyt på høye trær. Mattson Mårn (1931) kom stort sett til liknende resultater.

Bøhmer og Seip (1952) sammenliknet skjønnsmessig ansatt toppskuddlengde med de verdier en fikk ved måling av toppskuddlengden med Liljenströms dendrometer. Betraktes de siste verdiene som feilfrie, synes feilen ved skjønnsmessig ansettelse å være av størrelsesorden 20 %. Men i og med at toppskuddlengden målt med Liljenströms dendrometer heller ikke er feilfri, vil feilen ved skjønnsmessig ansettelse være noe mindre. De undersøkelsene som er referert, gjelder ansettelse av høydetilveksten på enkelttrærne. Det er ikke kjent hvilke feil en får for den gjennomsnittlige høydetilveksten for et bestand.

Formhøydetilveksten kan bestemmes ut fra høydetilveksten ved Jonsons tabeller (JONSON 1928), som bygger på den forutsetningen at formkvotienten holder seg konstant i perioden. Det er også utarbeidet spesielle formler, f. eks.

$$p_{fh} = \frac{100\, i_h}{h + 2{,}5} \tag{7.2–1}$$

(JONSON l.c.) eller

$$i_{fh} = 0{,}64\, i_h - 0{,}16\, i_d \tag{7.2–2}$$

(EIDE 1927). LANGSÆTER (1937) har undersøkt Jonsons og Eides metoder nærmere og funnet at de stort sett gir brukbare resultater.

På grunn av vanskelighetene med å bestemme høydetilveksten med noenlunde sikkerhet, har en forsøkt å finne erfaringstall for formhøydetilveksten. Slike erfaringstall er f. eks. utarbeidet i forbindelse med Schneiders formel:

$$p_v = \frac{400}{nd} \tag{7.2–3}$$

hvor n er antall årringer på siste cm, d er diameteren og k er en „konstant" som ansettes skjønnsmessig ut fra bestandsforholdene (PRODAN 1949, STOFFELS 1957 b). Da $p_v \doteq p_g + p_{fh}$, og $p_g \doteq (200/nd)$, følger av formel (7.2–3) at en går ut fra at det er en bestemt sammenheng mellom p_g og p_{fh} av formen $p_{fh} = kp_g$. Flere undersøkelser har vist at Schneiders formel ikke gir særlig gode resultater (se f. eks. SPEIDEL 1949).

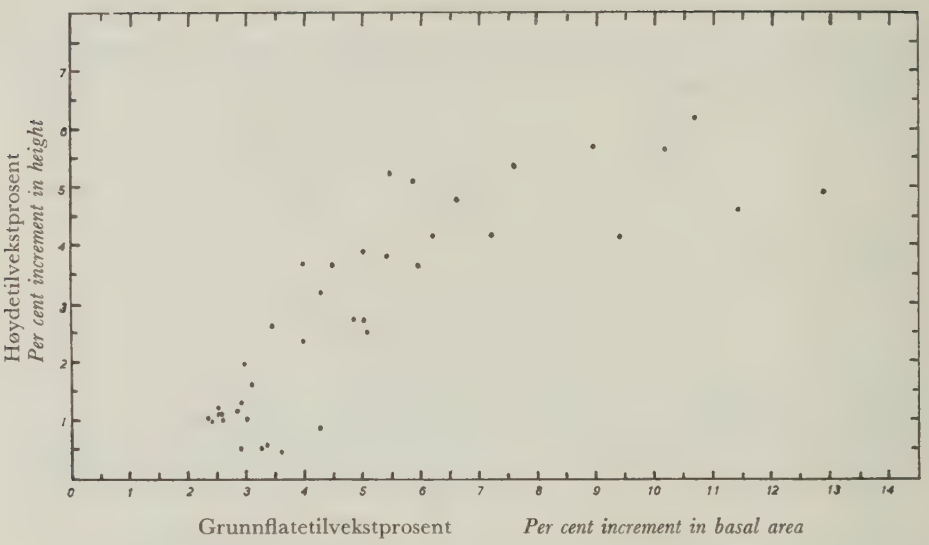
BÆKKEN (1932) fant at sammenhengen mellom høydetilvekst og diameter tilnærmet kan uttrykkes ved formelen

$$i_h = i_d \frac{h - 10\, d}{d} \tag{7.2–4}$$

og bruker denne sammenhengen til å utlede formhøydetilveksten som funksjon av diametertilveksten, diameteren og høyden. LANGSÆTER (1937) fant at Bækkens metode kunne gi ganske store systematiske feil.

JONSON (1928) angir erfaringstall for p_{fh} som funksjon av alderen (sml. også LEVAKOVIC 1926). WALLY (1925) går et skritt videre idet han foruten alderen også tar hensyn til høyden. Prinsipielt er dette den samme framgangsmåten som SPURR (1952, 1954) foreslår, nemlig at høydetilveksten bør bestemmes ut fra bonitetskurvene.

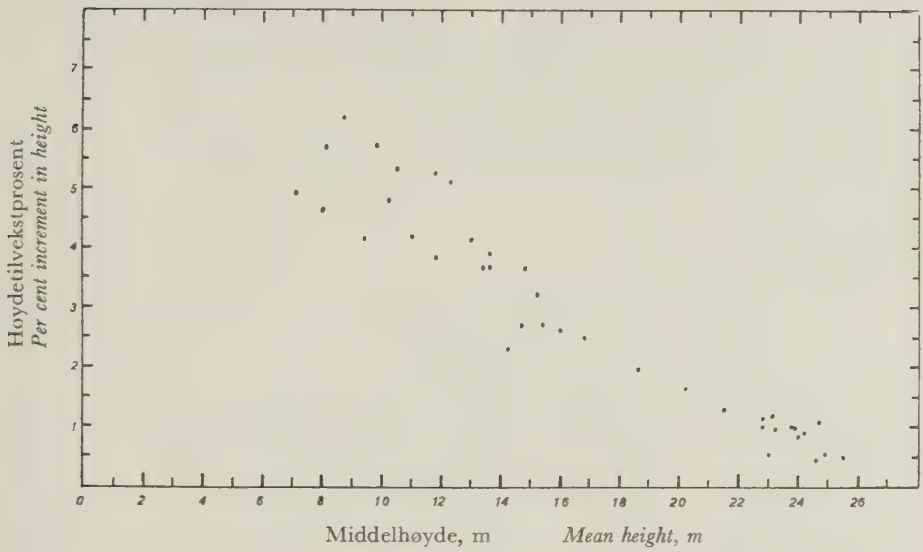
TRAMPLER og SIKORA (1956) har sammenliknet en formel av typen $p_v = kp_g$ (som Schneiders formel) med en formel av typen $p_v = p_g + C$



Figur 7.1. Sammenheng mellom høydetilvekstprosent og grunnflatetilvekstprosent. Materiale fra EIDE og LANGSÆTER (1941), bonitet A.
Figure 7.1. Relationship between per cent increment in height and in basal area. Data from EIDE *og* LANGSÆTER *(1941), site class A.*

(som nærmest svarer til Jonsons modifiserte formel for volumtilvekstprosenten). En rekke prøveflater i gran, edelgran og furu ble undersøkt. Materialet ble inndelt i aldersklasser. For furu var variasjonskoeffisienten for k mindre enn variasjonskoeffisienten for C (12 % mot 25–35 %). For gran var variasjonskoeffisienten for k omkring 11 %, mens variasjonskoeffisienten for C ikke er angitt. En kan imidlertid ikke ut fra dette uten videre slutte at det vil være bedre å bruke en formel av typen $p_v = kp_g$ enn en formel av typen $p_v = p_g + C$. Ved en mer detaljert inndeling (f. eks. i alder- og høydeklasser) vil sikkert variasjonen i C bli meget mindre enn når en bare inndeler i aldersklasser.

På de 42 flatene som er brukt som grunnmateriale i den foreliggende undersøkelsen, ble toppskuddlengden ansatt skjønnsmessig. Med den relativt store feilen som skjønnsmessig ansettelse kan gi, er det ikke hensiktsmessig å bruke dette materialet til en nærmere undersøkelse av forholdet mellom formhøydetilvekstprosenten på den ene siden og forskjellige lett bestembare bestandskjennetegn på den annen side. Det er imidlertid grunn til å peke på det forholdet at det synes å være mulig å finne ganske gode erfaringstall for høydetilvekstprosenten når tilveksten bestemmes bestandsvis.



Figur 7.2. Sammenheng mellom høydetilvekstprosent og middelhøyde. Materiale fra EIDE og LANGSÆTER (1941), bonitet A.

Figure 7.2. Relationship between per cent increment in height and mean height. Data from EIDE *og* LANGSÆTER *(1941), site class A.*

Det er en kjent sak at det er en sterk sammenheng mellom høydetilvekst, alder og bonitet. De fleste boniteringssystemer bygger på dette grunnlag. Det synes videre å være slik at en tynning som ikke er altfor ekstrem, har liten virkning på den gjennomsnittlige høydetilveksten, mens den kan influere sterkt på diametertilveksten. Det er derfor naturlig at en finner relativt svak sammenheng mellom høydetilvekstprosent og grunnflatetilvekstprosent. Dette illustreres godt ved hjelp av grunnmaterialet for den norske produksjonstabellen for gran (EIDE og LANGSÆTER 1941). I figur 7.1 er forholdet mellom de to tilvekstprosentene stillet opp grafisk, for feltene fra bonitet A. (Det er bare tatt med revisjonsresultater som bygger på „stående" prøvetrær.) Til sammenlikning er i figur 7.2 høydetilvekstprosenten avsatt over middelhøyden. Det er tydelig at variasjonen omkring en eventuell utjevningskurve vil være mindre i det siste tilfelle enn i det første. Forholdet er det samme for felter fra de andre bonitetene. For å få et begrep om hvor sterk sammenheng det er mellom høydetilvekstprosent (p_h) og middelhøyde, ble residualspredningen for funksjonen

$$p_h = b_1 + b_2 \log h \qquad (7.2\text{–}5)$$

beregnet for bonitetene A–D. Residualspredningen i prosent av den

gjennomsnittlige høydetilvekstprosenten var 20 % for bonitet A, 23 % for bonitet B, 26 % for bonitet C og 38 % for bonitet D. Grunnmaterialet for produksjonstabellen omfatter vesentlig mer „normale" bestand. Det vil sikkert være større spredning for bestand av gjennomsnittlig beskaffenhet. Men det synes likevel mulig å komme fram til erfaringstall som kan brukes med fordel ved bestemmelse av formhøydetilveksten, på denne måten.

7.3 *Volumtilveksten.*

I de fleste tilfelle knytter det seg større interesse til volumtilveksten enn til grunnflate- og formhøydetilveksten som er mer å betrakte som hjelpestørrelser for utledning av volumtilveksten.

Det synes å være en tydelig regional forskjell mellom de metodene som vanligvis brukes til tilvekstbestemmelse ved engangsmåling. I Skandinavia bestemmes tilveksten som regel ved Jonsons metode eller ved differens mellom kubikkmassen ved periodens begynnelse og slutt. I begge tilfelle kreves bestemmelse både av årringbredde og toppskuddlengde.

I Mellom-Europa synes de vanligste metodene å bygge på Schneiders formel eller på massekurvedifferenser (tariffdifferenser), det vil si metoder som ikke krever ansettelse av høydetilveksten. Et liknende forhold synes å gjelde for Nord-Amerika.

Det er ganske naturlig at en i områder med store trehøyder eller meget lauvskog søker å utarbeide metoder som ikke krever ansettelse av høydetilveksten ute i marken. Metodene bør så vidt mulig gi resultater som ikke er beheftet med systematiske feil. På dette punkt synes det å være en betydelig svikt ved flere av de metodene som brukes i dag.

7.3.1 *Massekurve- (tariffdifferens-) metoder.*

Det er karakteristisk for massekurvemetodene at volumtilveksten bestemmes utelukkende ved hjelp av massekurven (som gir sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter) på oppmålingstidspunktet. Massekurven brukes til å finne hvor stor økning i kubikkmasse som svarer til en bestemt økning i diameter ($\partial v / \partial d$). I praksis kan dette gjøres på en rekke forskjellige måter, alt etter hvorvidt en bruker den deriverte av en regresjonsfunksjon eller en bruker differenser (se f. eks. Langsæter 1928, Wahlenberg 1941, Meyer 1942, Spurr 1952). Felles for alle variantene er imidlertid at det forutsettes at sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter holder seg uforandret i tilvekstperioden.

Sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter kan enten bestemmes ved massekurver som utarbeides i hvert enkelt tilfelle eller ved tariffer (Loetsch 1953, 1954 b, Kräuter 1956, Richter et al. 1956, Stoffels 1957 a).

Tabell 7.3. Eksempel på beregning av volumtilveksten ved en massekurvemetode.
Example of the computation of volume increment by means of an "interpolation method"

$$\frac{\partial v}{\partial d} = 1{,}496\ d - 2{,}72 \qquad i_d = 4{,}73 + 0{,}032\ d$$

Diameter *Diameter*	$\frac{\partial v}{\partial d}$	i_d	Antall trær *Number of trees*	Volumtilvekst pr. tre *Volume increment per tree*
cm	10 dm²	mm		dm³
3	1,8	4,8	1	0,9
4	3,2	4,9	6	1,6
5	4,8	4,9	4	2,4
6	6,3	4,9	2	3,1
8	9,2	5,0	2	4,6
9	10,7	5,0	1	5,4
10	12,2	5,1	1	6,2
11	13,7	5,1	1	7,0
13	16,7	5,1	3	8,5
14	18,2	5,2	1	9,5
15	19,7	5,2	1	10,2
16	21,2	5,2	1	11,0
17	22,7	5,3	2	12,0
18	24,2	5,3	5	12,8
20	27,2	5,4	1	14,7
26	36,2	5,6	1	20,2
28	39,2	5,6	1	22,0
29	40,7	5,7	1	23,2
30	42,2	5,7	1	24,1
31	43,7	5,7	3	24,9
32	45,2	5,8	1	26,2
33	46,6	5,8	2	27,0
34	48,1	5,8	2	27,9
35	49,6	5,9	1	29,3
39	55,6	6,0	2	33,4
41	58,6	6,0	2	35,2
44	63,1	6,1	1	38,5

Samlet tilvekst: / *Total increment:* } 1,089 m³

Et eksempel vil gjøre framgangsmåten ved disse metodene klarere. For flate nr. 1 er sammenhengen mellom kubikkmasse og diameter gitt ved relasjonen: $v = 0{,}748\ d^2 - 2{,}72\ d$, hvis *dhf*-linjen brukes som utgangspunkt. Det vil si at den deriverte av kubikkmassen m. h. p. diameteren er: $v' = 1{,}496\ d - 2{,}72$. Videre er det en viss sammenheng mellom diametertilveksten og diameteren: $i_d = 4{,}73 + 0{,}032\ d$, når diametertilveksten er målt i mm, diameteren i cm. Beregningen av tilveksten i kubikkmasse foretas som vist i eksempel i tabell 7.3.

I bestand av utpreget uensaldret karakter (bledningsskog) synes høyde-

kurven å holde seg noenlunde konstant. Det vil også si at massekurven holder seg konstant. I slike tilfelle vil altså metodene gi riktig resultat. En kan imidlertid ikke se bort fra at også i slik skog kan det foregå forskyvninger i høydekurven (sml. Assmann 1952/53, Mitscherlich 1952).

I bestand som er noenlunde ensaldrete, er det som regel en tydelig tendens til at høydekurven forskyver seg (se f. eks. Hagberg 1939, Prodan 1951, Spurr 1952). En får derved feilaktige resultater hvis en bygger på den forutsetningen at høydekurven holder seg konstant. Speidel (1957) har utarbeidet en modifisert massekurvemetode som kan brukes som utgangspunkt for vurdering av hvilke feil en får ved de opprinnelige massekurvemetodene. Metoden går ut på at massetilveksten først bestemmes som om massekurven var konstant. Den tilveksten en finner på denne måten, multipliseres med en korreksjonsfaktor som er utarbeidet på grunnlag av Krenns tariffer (Krenn 1948). Korreksjonsfaktoren varierer fra 1,41 (for $d = 10$ cm) til 1,08 (for $d = 50$ cm). Disse tallene viser at hvis en beregner massetilveksten ut fra den forutsetningen at massekurven holder seg konstant, kan en få betydelige systematiske feil (av størrelsesorden opp til 40 %).

Loetsch (1954 b) angir at tariffdifferensmetoder alltid gir nøyaktigere verdier for tilveksten enn bestemmelse ved kubering ved tilvekstperiodens begynnelse og slutt. Dette må åpenbart være galt. Hvis massekurven ikke forskyver seg, bør de to metodene gi omtrent samme nøyaktighetsgrad når kuberingen foretas på markerte målesteder. Når massekurven forskyver seg, gir tariffdifferensmetoden større feil fordi den ikke tar hensyn til forskyvningen.

7.3.2 *Volumtilveksten bestemt ut fra en antatt sammenheng mellom p_g og p_v.*

Prodan (1949) har på grunnlag av Krenns tariffer utarbeidet erfaringstall for konstanten k i Schneiders formel (formel 7.2–3). Det er stillet opp særskilte tabeller som viser verdien av k for forskjellige treslag og forskjellige diametre. Metoden bygger på samme prinsipp som Speidels metode, og de to metodene vil derfor gi omtrent likeverdige resultater.

En noe annen utforming av forholdet mellom p_g og p_v har Prodan gitt senere (Prodan 1956). Det er utarbeidet spesielle tilveksttabeller som viser hvilken volumtilvekst som svarer til en grunnflatetilvekst på 1 m²/ha for bestand av gitt middeldiameter og middelhøyde. I en annen tabell er angitt hvilken volumtilvekstprosent som svarer til en bestemt diametertilvekst og middeldiameter. Grunnlaget for disse to tabellene synes å være den antatte sammenhengen mellom konstanten k i Schneiders formel og middeldiameteren. Tabellene vil derfor ikke gi nøyaktigere resultater

enn Schneiders formel. Som nevnt i omtalen av formhøydetilveksten, synes det å være relativt dårlig sammenheng mellom p_{fh} og p_g. Det vil si at de tilvekstberegningsmetodene som bygger på denne sammenhengen, ikke kan gi særlig gode resultater.

7.3.3 *Volumtilveksten direkte bestemt.*

Volumtilveksten kan bestemmes direkte når årringbredden og toppskuddlengden er kjent. Volumet ved tilvekstperiodens begynnelse og slutt bestemmes ved kubikktabell, og differensen utgjør tilveksten i perioden. Denne beregningsmåten vil gi praktisk talt samme resultat som når tilveksten bestemmes etter Jonsons metode (Jonson 1928).

Det foreligger flere muligheter for bestemmelse av volumtilveksten. For volumtilvekstens vedkommende ble forsøkt en regresjonsestimator:

$$I_v = Nb_1 + b_2G. \qquad (7.3.3\text{–}1)$$

For stratifisert utvalg ble forutsatt fordeling proporsjonalt med grunnflaten. 5 cm diameterklasser ble brukt. For *sps*-utvalg ble både Vigerusts tariffkubikkmasse (høydeklasse 1,0) og grunnflaten brukt som mål for størrelsen.

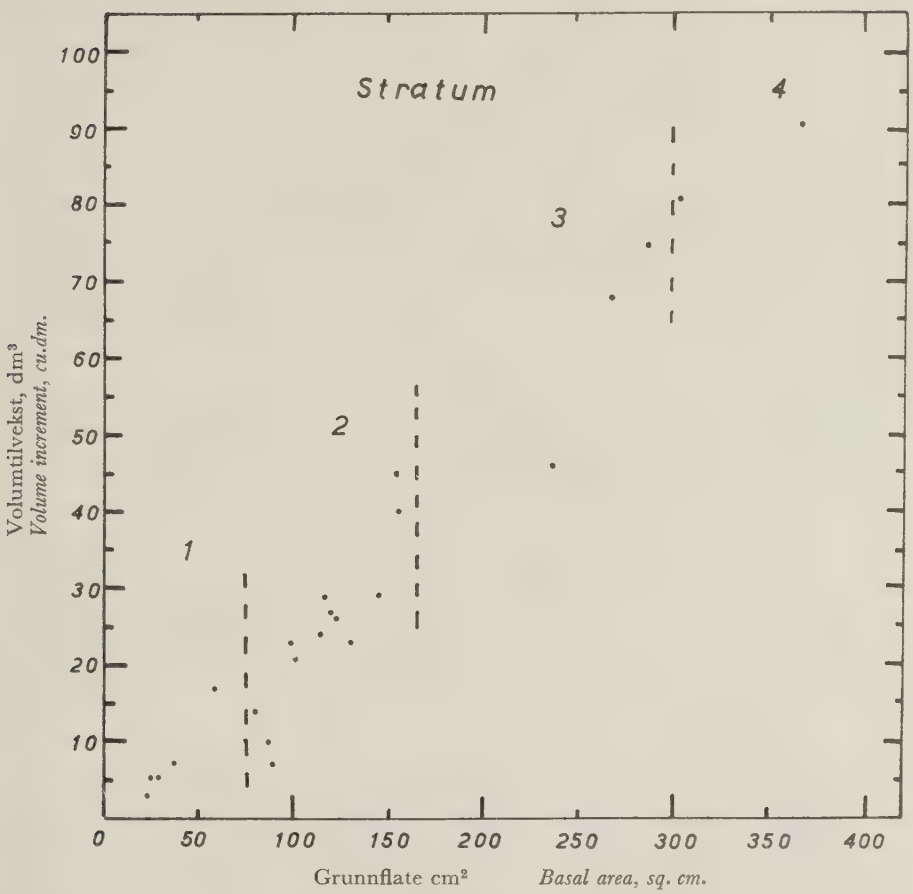
I tabell 7.4 er vist hvilke feil en får for de forskjellige metodene ved bruk av 20 prøvetrær. I gjennomsnitt er middelfeilene 6,0 % for stratifisert utvalg, 5,3 % for *sps*-utvalg med grunnflaten og 5,9 % med tariffkubikkmassen som mål for størrelsen, samt 6,6 % for regresjonsestimatoren (formel 7.3.3–1). For noen flater har stratifisert utvalg gitt større feil enn f. eks. estimering ved regresjonsestimator. Dette skyldes at det er brukt ganske vide strata (5 cm klasser). Når det er sterk sammenheng mellom tilvekst og grunnflate, vil residualspredningen bli liten, og regresjonsestimatoren gir godt resultat. Men på grunn av de vide strataene blir den gjennomsnittlige variasjonen innen strata stor. I figur 7.3 er vist et eksempel på sammenhengen mellom volumtilvekst og grunnflate for flate nr. 7.

Det er påfallende at *sps*-utvalg med tariffkubikkmassen som mål på størrelsen har gitt større feil enn med grunnflaten som mål. Årsaken til dette synes i første rekke å være at tariffkubikkmassen for en bestemt dimensjon er mindre i tallverdi enn grunnflaten samt at sammenhengen mellom tilvekst og tariffkubikkmasse ikke er lineær. En får derved større variasjoner i forholdet i_v/t enn i forholdet i_v/g. Særlig utpreget blir dette for små dimensjoner.

En sammenlikning med feilene for grunnflatetilveksten viser at den prosentiske middelfeilen blir noe mindre for volumtilveksten enn for

Tabell 7.4. Middelfeil for volumtilveksten ved bruk av 20 prøvetrær.
Standard error of the volume increment by the use of 20 sample trees.

Flate nr. *Plot No.*	Regresjons-estimator *Regression estimator*		Sps-utvalg «*PPS*»-*sampling*				Stratifisert utvalg 5 cm diam.klasser *Stratified sampling 5 cm diam.classes*	
			$\propto g$		$\propto t$			
	m³/ha	%	m³/ha	%	m³/ha	%	m³/ha	%
1	0,61	7,5	0,49	6,3	0,61	7,8	0,43	5,5
2	0,85	8,8	0,47	4,9	0,45	4,6	0,45	4,7
3	0,41	5,5	0,33	3,9	0,40	4,7	0,32	3,8
4	0,31	8,3	0,21	5,5	0,31	8,2	0,29	7,6
5	1,04	10,4	0,75	6,5	0,52	4,5	0,95	8,2
6	0,44	5,6	0,34	4,2	0,60	7,5	0,41	5,1
7	0,21	4,3	0,22	4,8	0,24	5,3	0,34	7,5
8	0,73	6,6	0,59	5,1	0,59	5,1	0,48	4,2
9	0,62	4,1	0,57	3,9	0,53	3,6	0,54	3,7
10	1,21	6,8	0,52	2,9	0,76	4,4	1,13	6,4
11	0,35	3,6	0,35	3,8	0,29	3,1	0,46	5,0
12	0,30	2,8	0,34	3,3	0,37	3,6	0,46	4,5
13	0,30	3,8	0,33	4,1	0,31	3,8	0,45	5,5
14	0,37	4,2	0,34	4,0	0,34	3,9	0,35	4,1
15	0,61	6,8	0,48	5,0	0,56	5,8	0,54	5,6
16	0,20	10,9	0,15	6,9	0,21	9,4	0,18	8,2
17	0,24	6,3	0,18	4,7	0,21	5,5	0,17	4,5
18	0,32	11,1	0,18	6,4	0,20	6,8	0,20	7,0
19	0,31	5,1	0,21	3,5	0,28	4,7	0,27	4,5
20	0,38	4,5	0,25	3,0	0,30	3,5	0,41	4,9
21	1,24	8,1	0,73	5,3	0,89	6,4	0,68	4,9
22	1,02	7,7	0,75	6,4	0,72	6,1	0,53	4,5
23	0,39	5,6	0,26	3,8	0,25	3,7	0,49	7,2
24	1,17	8,6	0,82	6,4	0,73	5,7	0,65	5,1
25	1,09	7,2	0,82	5,8	0,82	5,8	0,79	5,6
26	0,25	8,7	0,22	7,9	0,27	10,1	0,19	7,0
27	0,12	6,3	0,15	7,6	0,14	7,2	0,13	6,7
28	0,10	8,8	0,10	8,8	0,11	10,0	0,11	9,7
29	0,17	7,6	0,16	7,0	0,17	7,7	0,17	7,6
30	0,43	7,8	0,34	6,1	0,34	6,2	0,31	5,6
31	0,48	8,0	0,48	8,0	0,40	6,7	0,43	7,2
32	0,39	6,3	0,34	5,5	0,34	5,4	0,37	5,9
33	0,23	5,3	0,18	4,4	0,30	7,3	0,32	7,8
34	0,52	5,1	0,48	5,1	0,60	6,4	0,63	6,8
35	0,47	6,3	0,41	5,8	0,34	4,7	0,34	4,8
36	0,18	6,4	0,16	5,7	0,19	7,0	0,18	6,5
37	0,09	2,7	0,12	3,6	0,11	3,3	0,14	4,3
38	0,14	6,4	0,14	6,3	0,14	6,1	0,15	6,8
39	0,35	8,6	0,26	6,1	0,43	9,8	0,31	7,2
40	0,17	4,0	0,17	3,7	0,28	6,1	0,26	5,7
41	0,36	7,8	0,31	6,8	0,24	5,3	0,17	3,7
42	0,25	6,6	0,18	4,6	0,24	6,2	0,37	9,7



Figur 7.3. Eksempel på sammenhengen mellom volumtilvekst (10 år) og grunnflate.
Figure 7.3. Example of the relationship between volume increment (10 years) and basal area.

grunnflatetilveksten, under forutsetning av et gitt prøvetreantall. Dette resultatet er påfallende. Forklaringen er dels å søke i det forholdet at volumtilveksten er sammensatt av to komponenter som begge er beheftet med feil. Den prosentiske feilen på summen vil ofte bli mindre enn den prosentiske feilen på komponentene. Imidlertid kommer også et annet forhold inn. Det forklares best ved et eksempel: Det er gitt en rekke trær som ved målingstidspunktet er 20 cm i diameter og har høyde på 15 m. Med den kubikktabellen som er brukt, svarer dette til en formhøyde på 7,1 m og en kubikkmasse på 0,224 m³. For 10 år siden var dimensjonene for gjennomsnittstreet f. eks. 15 cm–12 m. Dette svarer til en kubikkmasse på 0,104 m³. Grunnflatetilveksten har i gjennomsnitt vært 137 cm²

og volumtilveksten 120 dm^3. Noen trær har vokst bedre enn gjennomsnittet. Diameteren var kanskje 13 cm for 10 år siden og høyden den samme, 12 m. Grunnflatetilveksten for disse trærne har vært 181 cm^2. Men formhøydetilveksten har vært mindre enn for gjennomsnittet. Volumtilveksten har vært 141 dm^3. Disse trærne har altså hatt en avvikelse fra gjennomsnittet som svarer til 32 % for grunnflatetilveksten, men bare 18 % for volumtilveksten. Selv om en regner med at disse trærne har vokst bedre enn gjennomsnittet også i høyde, kan likevel avvikelsen for grunnflatetilveksten være større enn for volumtilveksten. Antas at dimensjonene for 10 år siden var 13 cm–11 m, blir avvikelsen i volumtilvekst 24 %, altså fortsatt mindre enn for grunnflatetilveksten.

Som nevnt tidligere, ble toppskuddlengden ansatt skjønnsmessig ute i marken. Det er derfor mulig at det foreligger systematiske feil ved at toppskuddlengden gjennomgående er ansatt for høyt eller for lavt. Dette har mindre betydning i det foreliggende tilfelle fordi det er *variasjonen* i toppskuddlengde som influerer på middelfeilen. Det er imidlertid et vanlig trekk ved skjønnsmessige ansettelser at det er en tendens til at variasjonene blir noe for små. Men tar en i betraktning at toppskuddlengden spiller relativt liten rolle for den samlete tilveksten, skulle ikke dette bety noe vesentlig.

7.4 *Tilveksten på uttatte trær, tilvekstperiodens lengde.*

Når den samlete tilveksten skal bestemmes for en svunnen periode, må en ta hensyn til den tilveksten som er avsatt på trær som er felt i tilvekstperioden. Tilveksten på disse trærne må som regel ansettes skjønnsmessig, eventuelt med støtte i noen målinger. En framgangsmåte som er vanlig brukt, er at tilvekstberegningen foretas ved Jonsons formel, idet en sløyfer korreksjonsleddet (forutsatt det brukes diskontoprosent). En regner da med at tilveksten på de uttatte trærne svarer noenlunde til størrelsen av korreksjonsleddet. Denne framgangsmåten kan kanskje gi rimelige resultater for en hel skog som drives noenlunde regelmessig (Langsæter 1944). Men for det enkelte bestand kan den gi resultater som er beheftet med betydelige feil. Hvis det ikke har foregått noen hogst i tilvekstperioden, vil den beregnete tilveksten bli for høy.

Tidspunktet for tynningsuttaket har meget å si. Jo senere uttaket skjer, jo større vil tilveksten på de uttatte trærne være. I noen tilfelle vet en nøyaktig når uttaket har skjedd. Ofte kan en også foreta en datering av hogsten ved hjelp av stubbenes utseende, undersøkelse av borprøver m. m. Ved måling av stubbene kan en også skaffe seg et mål for hvor meget som er tatt ut (Nyyssönen 1956 b). Det er derimot vanskelig å finne et noenlunde nøyaktig uttrykk for tilveksten på de uttatte trærne. Det er ikke

alltid slik at de felte trærne har en tilvekstprosent som svarer til de gjenstående trærne. Hogstene kan være selektive.

Det vil sannsynligvis ha liten hensikt å stille opp bestemte regler for hvor stor del tilveksten på de uttatte trærne utgjør av den samlete tilveksten. Variasjonene i tynningsprosent og tidspunkt for uttak er alt for store til at slike regler kan få vesentlig verdi. En må derfor bare slå fast at en her har en feilkilde av vesentlig betydning for tilvekstbestemmelsen i bestand. Det er ikke uvanlig med tynningsuttak på 30 % av den gjenstående kubikkmassen. I slike tilfelle kan altså den beregnete tilveksten også bli beheftet med feil opp mot denne størrelsesorden.

Den feilen som skyldes tilveksten på de uttatte trærne, vil reduseres hvis en forkorter tilvekstperiodens lengde. Går en over fra 10-årig til 5-årig tilvekstperiode, vil tynninger som foregikk 6–10 år før tilvekstperiodens slutt, ikke ha noen betydning i det siste tilfelle. Ved å gå over til kortere tilvekstperioder må en imidlertid regne med andre feilmuligheter:

1. De klimabetingete tilvekstvariasjonene vil bli større.
2. Målefeil vil gi større utslag.
3. Representasjonsfeilen vil bli større.
4. Tilveksten vil bli sterkere influert av hogst o. l.

Eklund (1957) har angitt 5-års middeltall for årringindekser for gran (perioden 1900-1944). I gjennomsnitt er middelavviket for årringindeksen 5,6 % når avvikelsene regnes ut fra „normalnivået" (100 %). For 10-års perioder er middelavviket 4,7 %. En økning av periodelengden fra 5 til 10 år bevirker derfor ikke særlig sterk reduksjon i den klimabetingete tilvekstvariasjonen. Årsaken til dette er de mer langbølgete klimavariasjonene som gjør at det blir relativt høy positiv korrelasjon mellom to 5-årige naboperioder.

Eklunds materiale omfatter et område av betydelig utstrekning. Dette kan bevirke at eventuelle forskjeller av mer lokalklimatisk karakter kan utviskes. Ording (1941) har utarbeidet korrigerte og standardiserte årringserier for bestemte lokaliteter. En av de lokalitetene som synes å ha en relativt stor variasjon i korrigert årringbredde fra år til år, er Lyse i Sørkedalen. Middelavviket for 5-års perioder er her 10,5 % og for 10-års perioder 10,1 %. Også i dette tilfelle betyr en økning i periodelengden bare en svak reduksjon i den klimabetingete variasjonen. Resultatene til Eklund (1942) og Holmsgaard (1945) peker i samme retning.

De målefeil en får ved måling av årringbredden kan deles i tre grupper:

1. Avrundingsfeil fordi årringbredden i marken ikke kan måles nøyaktigere enn til nærmeste hele eller halve millimeter.
2. Systematiske målefeil.
3. Tilfeldige målefeil.

I absolutt mål er avrundingsfeilen uavhengig av tilvekstperiodens lengde. Målt i prosent vil avrundingsfeilen bli dobbelt så stor hvis tilvekstperioden halveres. Som regel vil imidlertid avrundingsfeilen ikke spille noen nevneverdig rolle fordi den er av størrelsesorden 0,3 mm selv ved avrunding til nærmeste hele millimeter.

Det materiale som foreligger for vurdering av de systematiske målefeilene, er sparsomt. Seip (1957) har analysert et materiale med målinger av 10 årringers bredde. Det var en tendens til at de minste årringbreddene ble ansatt for høyt, de største for lavt. Denne systematiske tendensen skyldes særlig 10 prøvetrær (av 278) som avvek tydelig fra de øvrige. Det er vanskelig å vite hvilken vekt en skal legge på disse „ekstremverdiene". Sjaltes de ut, er den systematiske feilen 0,5 mm for de største og minste årringbreddene. Selv om en regner med at en systematisk feil av denne størrelsesorden beholdes hvis tilvekstperiodens lengde forkortes til 5 år, er denne feilen så liten at den ikke betyr noe vesentlig.

Den tilfeldige målefeilen er 6,5 % av den gjennomsnittlige årringbredden når de grove feilene er sjaltet ut. Ved en halvering av tilvekstperiodens lengde må en regne med at denne feilen vil øke noe. Men økningen vil neppe være særlig sterk fordi det er sannsynlig at en stor del av de tilfeldige feilene skyldes at en i marken har målt galt antall årringer (9 eller 11 istedenfor 10). Ved måling av 5 årringers bredde er ikke denne feilmuligheten så stor.

Ved overgang fra 10-årig til 5-årig tilvekstperiode vil representasjonsfeilen øke noe, fordi det skjer en viss utjevning av tilfeldige variasjoner innen trærne når en måler 10 årringer i forhold til 5 årringer. Men variasjonen innen trær er som regel betydelig mindre enn variasjonen mellom trær så dette forholdet vil heller ikke spille nevneverdig rolle. Som eksempel kan nevnes at for 20 prøvetrær (tilfeldig valgt) fra flate nr. 10 er residualspredningen for linjen $i_d = b_1 + b_2 d$, 37,0 % ved bruk av 10 årringers bredde, mot 37,2 % ved bruk av 5 årringer. Tilsvarende tall for flate nr. 40 er 30,3 % og 37,2 %. Forøvrig kan både den tilfeldige målefeilen og representasjonsfeilen bringes så langt ned en ønsker, ved å ta et tilstrekkelig antall prøvetrær.

Ved å gå over til korte tilvekstperioder vil de verdiene en finner for tilveksten bli ganske sterkt influert av hogstinngrep o. lign., selv om tilveksten i og for seg blir riktig bestemt. Er det f. eks. foretatt en sterk hogst 6 år før målingstidspunktet, vil tilveksten i den følgende 5-års perioden bli preget av dette, fordi trærne ikke reagerer fullt ut på hogstinngrep før det er gått noen år. Dette moment vil imidlertid ikke spille noen rolle hvis en vesentlig er interessert i den tilveksten som faktisk har vært. Denne vil bli riktig registrert.

Sammenholdes de forskjellige fordeler og mangler som er knyttet til en overgang fra 10-årig til 5-årig tilvekstperiode, ser det ut til at en vil vinne atskillig ved å gå over til den kortere tilvekstperioden. Den feilen som kommer inn i tilvekstberegningen ved tilveksten på de trærne som er uttatt i tilvekstperioden, vil i gjennomsnitt bli halvert, mens de andre feilkildene (målefeil, klimavariasjon og representasjonsfeil) ikke vil få noen vesentlig større betydning. Det synes derfor å være grunn til å underkaste dette spørsmålet en mer inngående analyse.

7.5 *Forutsigelse av framtidig tilvekst.*

For mange formål knytter det seg størst interesse til tilveksten for en kommende periode, fordi denne tilveksten har direkte betydning for hvilke tiltak som skal treffes. Tilveksten for en kommende periode forutsies ofte med utgangspunkt i tilveksten for en svunnen periode (se f. eks. Petrini 1949, 1957). En vanlig framgangsmåte er å bruke den beregnete diskontoprosenten som rabattprosent. For et bestand som behandles med jevne, regelmessige tynninger, vil tilvekstprosenten som regel synke med alderen. Når en bruker diskontoprosenten som rabattprosent for en kommende periode, vil dette kanskje passe i noen tilfelle fordi aldersvirkningen svarer til forskjellen mellom prosentene. Men i mange tilfelle kan metoden gi galt resultat. En svakhet er det også at resultatene blir sterkt avhengig av klimavekslingene. Ording (1941) har for fire lokaliteter funnet at middelavviket for differensen mellom årringbredden for to påfølgende 10-årsperioder varierer fra 10 til 16 %. Hvis en derfor skal forutsi tilveksten for en kommende periode på grunnlag av tilveksten for en svunnen periode, må en regne med feil av denne størrelsesorden fordi klimaet varierer. Feilene blir noe mindre hvis en ønsker å forutsi den „klimakorrigerte", framtidige tilveksten.

På grunn av de relativt store feilene en får ved denne framgangsmåten, er det forsøkt å finne andre muligheter til å bestemme den framtidige tilveksten. I noen tilfelle brukes produksjonstabeller til dette formålet. Men dette byr på flere problemer. Alder og bonitet som danner inngang i tabellene, er ofte vanskelige å bestemme med tilstrekkelig nøyaktighet. Videre gjelder produksjonstabellene som regel for „normale" bestand som har god tetthet. Det må derfor innføres korreksjonsfaktorer når tettheten er en annen. For å få bort noen av disse vanskelighetene er det utarbeidet egne erfaringstall for tilveksten i skog av forskjellig tetthet og alder (se f. eks. Ilvessalo 1956, Erteld 1957).

Nyyssönen (1951) angir at tilveksten blir bestemt like nøyaktig ved hjelp av 3 prøvetrær som ved bruk av en tilveksttabell. Denne sammenlikningen sier imidlertid lite om brukbarheten av tilveksttabeller. Ved

hjelp av prøvetrærne kan en bestemme den aktuelle tilveksten, påvirket bl. a. av klimaet i tilvekstperioden, mens tilveksttabellen viser tilveksten når en ser bort fra klimavariasjonene.

Det foreligger ingen norske tilveksttabeller som kan belyse spørsmålet om hvor nøyaktig tilveksten kan bestemmes ved slike erfaringstall. Et visst holdepunkt kan en få ved å bruke de regresjonsfunksjonene som Eide og Langsæter (1941) og Braathe (1953 b) har utarbeidet for grunnflatetilvekstprosentens vedkommende. Braathe (l.c.) har prøvd å finne fram til en funksjon som ikke har alderen som uavhengig variabel. Den funksjonen som har minst residualspredning for grunnflatetilvekstprosenten har formen

$$p_g = a + 0{,}410\,\frac{100}{d_g} - 0{,}775\,\frac{h_L\sqrt{N}}{10\,d_g} + 0{,}391\,\frac{10\,H_{50}}{d_g} + 0{,}236\,\frac{H_{50}\sqrt{\Sigma g}}{G} \qquad (7.5\text{–}1)$$

hvor H_{50} er middelhøyden ved alder 50 år for vedkommende bonitet som flaten hører til, og $\sqrt{\Sigma g}$ er et uttrykk for de siste tynningene. Denne funksjonen som krever kjennskap til tynningsuttaket, er ikke særlig velegnet for det tilfelle at en skal vurdere tilveksten på felter hvor en ikke kjenner tynningsuttaket. Ved imøtekommenhet fra dr. Braathe har jeg fått låne hans beregninger for å bestemme regresjonsfunksjonen når tynningsleddet tas vekk. Denne funksjonen får formen

$$p_g = 0{,}361 + 0{,}368\,\frac{100}{d_g} - 0{,}993\,\frac{h_L\sqrt{N}}{10\,d_g} + 0{,}465\,\frac{10\,H_{50}}{d_g} \ldots \qquad (7.5\text{–}2)$$

For at formel (7.5–2) skal kunne brukes, må boniteten være kjent, og for å bestemme denne, kreves alderen. Dette byr på det problemet at variasjonen i alder mellom trærne på en flate kan være meget stor. Det er ikke uvanlig at differensen mellom eldste og yngste tre kan være 50 år eller mer. Den gjennomsnittlige alder en beregner vil derfor være beheftet med en ganske stor tilfeldig feil. I tillegg kommer det forholdet at en ikke vet hvilken middelalder som bør beregnes. En kan beregne aritmetisk middelalder, grunnflateveiet middelalder, „massealder" m. m. (sml. Müller 1923). En nærmere diskusjon av disse problemene ligger utenfor rammen av dette arbeidet. Her skal bare som eksempel på bruken av tilveksttabeller vises hvilke resultater en kommer fram til hvis en velger en av disse definisjonene av middelalderen.

Den aritmetiske middelalder i brysthøyde ble beregnet for hver flate på

grunnlag av prøvetrærnes aldre. Produksjonstabellens bonitetskurver (Eide og Langsæter 1941) ble omregnet slik at de viste høyden som funksjon av brysthøydealderen. Ved denne omregningen ble regnet med følgende antall år for å nå opp i brysthøyde: Bonitet A – 9 år, bonitet B – 11 år, bonitet C – 13 år, bonitet D – 15 år og bonitet E – 17 år (sml. Braathe 1953 a). Ved hjelp av disse bonitetskurvene kunne de enkelte flatene boniteres.

Formel (7.5–2) gjelder framtidig tilvekst. På grunnlag av bonitetskurvene ble derfor høyden for 5 år siden bestemt for hver flate. Middeldiameteren for 5 år siden ble bestemt ved hjelp av grunnflatetilveksten. For hver flate ble deretter grunnflatetilvekstprosenten beregnet etter formel (7.5–2). Beregningen ble bare foretatt for flater med aritmetisk middelalder over 30 år ved periodens slutt. Middelavviket for differensen mellom beregnet og observert grunnflatetilvekstprosent utgjør 0,79 % eller 24,5 % av den gjennomsnittlige grunnflatetilvekstprosenten.

Den beregningen som er gjennomført, må kun oppfattes som et eksempel på hvilke feil en kan regne med å få ved bruk av tilveksttabeller ved tilvekstbestemmelsen. Hvis en forsøker å utarbeide egne tilveksttabeller for mer unormal skog, kan en kanskje regne med å få noe mindre feil. I formel (7.5–2) spiller f. eks. „tetthetsleddet" $h\sqrt{N}$ ganske stor rolle. På mer unormale felter vil det ofte være trær med små dimensjoner. Disse trærne vil ha liten betydning på størrelsen av grunnflaten, middelhøyden og grunnflatetilveksten, men større betydning for produktet $h\sqrt{N}$. Ved en annen definisjon av middelhøyden, f. eks. ved „Hiratahøyden" (Hirata 1955): $h_H = \sqrt{(1/N) \cdot \Sigma h^2}$, vil dette momentet kanskje ikke spille så stor rolle. Men hvis denne definisjonen av middelhøyden skal brukes, blir regresjonsfunksjonen forandret.

I formel (7.5–2) har boniteten ganske meget å si for størrelsen av grunnflatetilveksten. En feilbedømmelse av boniteten på én bonitetsgrad vil medføre en endring i den beregnete grunnflatetilvekstprosenten lik $13{,}95/d$. Hvis derfor middeldiameteren er 14 cm, betyr dette straks 1 % i grunnflatetilvekstprosenten.

Hvis en skal forsøke å komme fram til bedre tabeller for estimering av den framtidige tilveksten, må det derfor legges meget arbeid på å finne måter til å bestemme tettheten og boniteten slik at en ikke innfører store feil på grunn av feil på de uavhengige variable. Det er imidlertid lite sannsynlig at middelfeilen på den framtidige tilveksten kan presses vesentlig under 20 %. Derfor vil en ved tilveksttabeller neppe kunne forutsi den framtidige tilveksten med større nøyaktighet enn ved mer direkte estimering på grunnlag av den tilveksten som har vært i en foregående periode. Men tilveksttabeller vil ha sin store betydning ved

beregninger som må foregå hurtig og hvor det ikke stilles så store krav til nøyaktigheten. Videre vil de være til stor nytte ved bestemmelse av tilveksten for større områder, idet de kan brukes i forbindelse med „dobbelt sampling" (eng.: *double sampling*).

8. Samlet vurdering av metodene for beregning av volumtilveksten.

Det er en prinsipiell forskjell mellom tilveksten for en svunnen periode, „tilveksten nå" og tilveksten for en kommende periode. Tilveksten for en svunnen periode kan måles direkte i motsetning til de to andre tilvekststørrelsene som må bygge på bestemte forutsetninger.

For bestemmelse av tilveksten for en svunnen periode er det en nokså klar forskjell mellom de metodene som bygger utelukkende på diametertilveksten og de metodene som også tar hensyn til høydetilveksten. Ved bestemmelse av volumtilveksten på grunnlag av diametertilveksten alene må en regne med at tilveksten i alle fall vil bli bestemt med en viss spesiell forventningsskjevhet. Det er imidlertid påfallende at flere av de metodene som er i bruk (særlig massekurvemetodene), gir estimater som også har generell forventningsskjevhet, i første rekke fordi de ikke tar hensyn til forskyvningen av høydekurven.

Det synes å være relativt liten forskjell mellom de metodene som bygger på en direkte bestemmelse av volumtilveksten ved å ta hensyn til både diameter- og formhøydetilveksten. Grunnen til dette er i første rekke de store variasjonene i årringbredde fra tre til tre, selv innen samme diameterklasse. Jo større variasjoner det er, jo mindre forskjeller vil det gjennomgående være mellom estimeringsmetodene. Valget av en bestemt metode vil derfor vesentlig bli avhengig av andre hensyn (f. eks. hvordan kubikkmassen skal bestemmes).

For bestemmelse av tilveksten i en kommende periode eller „tilveksten nå", er det utviklet en rekke metoder, særlig basert på ulike tilvekstprosenter (se f. eks. Kuusela 1954). Det som i første rekke er avgjørende for brukbarheten av de forskjellige metodene, er imidlertid i hvilken grad en kan ta hensyn til tilveksten på trær som er eller blir uttatt i tilvekstperioden.

„Tilveksten nå" kan defineres som den løpende tilvekst korrigert for klimasvingninger. Bestemmelsen kan i praksis foretas ved utjevning av diameter- eller grunnflatetilveksten for de siste 5 eller 10 år (se f. eks. Kuusela 1954). Ved bruk av så korte tilvekstperioder må en imidlertid regne med at klimavariasjonene ikke blir fullstendig eliminert. Den

beregnete tilveksten kan videre være påvirket av hogster som er foretatt i tilvekstperioden, på grunn av at det tar en viss tid før trærne reagerer fullt ut.

Ved forutsigelsen av den framtidige tilveksten må en regne med usikkerhetsfaktorer på grunnlag av klimavariasjonene og avgang av trærne (naturlig eller ved hogster). Alt i alt gjør dette at en må regne med at den framtidige tilveksten vil bli ansatt med relativt stor feil, selv om den er basert på den tilveksten som har vært i en foregående periode.

9. Sammendrag.

Undersøkelsen er basert på 42 flater utlagt i granskog på forskjellige steder i Øst-Norge. På hver flate ble alle høydene målt, mens det ble tatt prøvetrær for bestemmelse av tilveksten. En oversikt over flatene er gitt i tabell 3.1.

Følgende kuberingsmetoder er undersøkt nærmere:

1) Kubering ved høydekurve.
2) „ „ masse- og *dhf*-linje.
3) „ „ tariff, brøkestimator med tilfeldig utvalg og *sps*-utvalg.
4) „ „ stratifisert utvalg.
5) „ „ bestandsvolumtabell.
6) „ „ grunnflate- og tariffmiddelstamme samt Hohenadl's middelstammer.

Nøyaktigheten av de forskjellige metodene er behandlet ut fra den forutsetning at kubikkmassen skal bestemmes separat for den enkelte prøveflate.

Den nøyaktigste kuberingsmåten er kubering ved stratifisert utvalg med optimal fordeling av prøvetrærne (dvs. fordeling proporsjonalt med produktet av treantallet og standardavviket innen strataene). I praksis vil ikke standardavviket være kjent. Det er derfor av interesse å se at fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen innen strataene er nesten like effektiv som optimal fordeling. Med 20 prøvetrær og 2 cm diameterklasser er middelfeilen 2,7 % ved fordeling proporsjonalt med grunnflatesummen, mot 2,5 % ved optimal fordeling.

Kubering ved masselinje har i gjennomsnitt gitt en middelfeil på 3,9 % ved bruk av 20 prøvetrær. Kubering etter høydekurve og *dhf*-linje (som begge bygger på bruk av en veiet regresjonsestimator) har ikke gitt noe vesentlig bedre resultat enn kubering etter masselinje (3,5 % og 3,9 %). Dette skyldes at det bygges på en estimator av typen $v = b_1 d^k + b_2 d^{k+1} + \ldots$ med vekter proporsjonale med d^{-2k}. En slik estimator gir ikke bedre

resultater enn en uveiet estimator. Kubering ved tariff og bruk av brøkestimator har også gitt omtrent samme resultat.

Kubering ved *sps*-utvalg med tariffkubikkmassen som mål på størrelsen, har gitt godt resultat. I gjennomsnitt er middelfeilen 3,2 % når det brukes 20 prøvetrær. Grunnen til dette er drøftet nærmere.

De nevnte kuberingsmetodene gir alle estimater som er praktisk talt fri for forventningsskjevhet. Dette er ikke tilfelle med de andre metodene (kubering etter bestandsvolumtabell og middelstammer).

Forventningsskjevheten for de estimatene en får ved en bestemt metode, kan enten være spesiell eller generell. Estimatene er beheftet med spesiell forventningsskjevhet hvis de er forventningsskjeve for den enkelte flate, mens metoden forøvrig bygger på et riktig prinsipp. Det vil si at gjennomsnittet av estimatene for en rekke flater er fri for forventningsskjevhet. Er ikke dette tilfelle, har estimatene generell forventningsskjevhet.

Kubering etter Nyyssönens bestandsvolumtabell (Nyyssönen 1955) ga estimater med generell forventningsskjevhet. Hvis grunnflateveiet middelhøyde ble brukt, var forventningsskjevheten ca. 5 %. Middelavviket for differensene mellom beregnet og virkelig kubikkmasse var også ca. 5 %. Det vil si at en må regne med en spesiell forventningsskjevhet av størrelsesorden 5 % eller større i ca. ett av tre tilfelle.

Kubering etter bestandsvolumtabell foretas på grunnlag av grunnflatesum og middelhøyde. I tabell 5.2 er gjengitt middelfeilene for høydekurven, ved en diameter som svarer til grunnflatemiddeldiameteren. Tabell 5.8 viser middelfeilene for grunnflateveiet middelhøyde. I gjennomsnitt er disse siste middelfeilene noe mindre enn for høydekurven. Forklaringen på dette forholdet er å søke i høydekurvens krumlinjete karakter.

Kubering etter grunnflatemiddelstamme, tariffmiddelstamme og Hohenadl's middelstammer vil gi forventningsskjeve estimater. Forventningsskjevheten er størst ved kubering etter grunnflatemiddelstamme, idet det er en ganske betydelig generell forventningsskjevhet, særlig for unge bestand. Middelavviket for differensene mellom beregnet og virkelig kubikkmasse er for de tre metodene av samme størrelsesorden som ved kubering etter bestandsvolumtabell (ca. 5 %).

Valget av kuberingsmetode bør i noen grad avhenge av hvilke enheter kubikkmassen skal bestemmes for. Er det av vesentlig betydning å få bestemt kubikkmassen nøyaktig for hver enkelt prøveflate, bør en av de nøyaktigste kuberingsmetodene som gir forventningsrette estimater, brukes (i første rekke stratifisert utvalg). Er derimot hovedinteressen knyttet til gjennomsnittet av en rekke prøveflater, kan det være aktuelt å bruke en av de metodene som gir resultater med bare spesiell forventningsskjevhet. Disse metodene faller enklere og raskere i bruk.

Tilveksten kan gjelde for en svunnen periode, „nå", eller for en kommende periode. Det er viktig at det blir angitt hvilken periode tilveksten skal gjelde for, fordi det synes å være visse forskjeller landene mellom på dette punkt.

Grunnflatetilveksten på de gjenstående trærne for en svunnen periode kan bestemmes direkte på grunnlag av boring. Skal grunnflatetilveksten inkludere barkens tilvekst, må det gjøres egne korreksjoner for dette.

Forskjellige estimatorer for estimering av grunnflatetilveksten er undersøkt nærmere:

1) Regresjonsestimator basert på sammenhengen mellom grunnflatetilvekst og grunnflate.
2) Regresjonsestimator basert på sammenhengen mellom diametertilvekst og diameter.
3) Stratifisert utvalg (5 cm diameterklasser) med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen.
4) *Sps*-utvalg med sannsynlighet proporsjonal med grunnflaten.

De beregnete tilvekstene ved de tre første beregningsmåtene framgår av tabell 7.1. Stratifisert utvalg synes å gi de nøyaktigste resultatene. I gjennomsnitt var middelfeilen for grunnflatetilveksten 8,0 % med 20 prøvetrær (tabell 7.2). Forskjellen mellom metodene var imidlertid ikke stor. *Sps*-utvalg ga en middelfeil på 8,8 % når grunnflaten ble benyttet som mål. Regresjonsestimatoren (formel 7.1-8) ga en middelfeil på 9,8 %, mens feilen for estimatoren (7.1–6) ikke ble undersøkt nærmere.

De framgangsmåtene som nå er mest brukt til bestemmelse av volumtilveksten på grunnlag av grunnflatetilveksten alene (massekurvemetoder, antatt sammenheng mellom p_v og p_g), synes ikke å gi særlig gode resultater. Muligheten for å bestemme formhøydetilveksten ut fra bestandsmiddelhøyde og alder, eller bonitet og alder bør undersøkes nærmere.

Middelfeilen for volumtilveksten bestemt på forskjellige måter er gitt i tabell 7.4. På samme måte som for grunnflatetilveksten er det liten forskjell mellom estimeringsmetodene. Stratifisert utvalg med fordeling av prøvetrærne proporsjonalt med grunnflatesummen har gitt en gjennomsnittlig middelfeil på 6,0 % ved bruk av 20 prøvetrær. *Sps*-utvalg med grunnflaten som mål for størrelsen ga i gjennomsnitt 5,3 % og *sps*-utvalg med tariffkubikkmassen som mål 5,9 %. Regresjonsestimatoren $I_v = Nb_1 + b_2G$ ga i gjennomsnitt en middelfeil på 6,6 %.

En sammenlikning av middelfeilene for volumtilveksten og grunnflatetilveksten viser at volumtilveksten blir relativt sikrest bestemt (for en gitt metode og gitt prøvetreantall). Forklaringen på dette synes bl. a. å være at en bestemt grunnflatetilvekst alene samtidig gir en negativ formhøydetil-

vekst. En tilfeldig feil i grunnflatetilveksten vil prosentisk sett gi mindre utslag i volumtilveksten.

Ved bestemmelse av tilveksten for en svunnen periode på grunnlag av boring har en alltid et usikkerhetsmoment på grunn av at endel av den samlete tilveksten er avsatt på trær som er felt i tilvekstperioden. Den feilen en får på denne måten, er større jo lengre perioden er. Ved forkortelse av tilvekstperioden vil denne feilen avta. På den annen side vil dette medføre ulemper på grunn av større innflytelse fra klimavariasjonene, samt større måle- og representasjonsfeil. De undersøkelser som foreligger over klimavariasjonenes innflytelse på tilveksten, synes å vise at de klimapregete variasjonene ikke stiger vesentlig om periodelengden reduseres fra 10 til 5 år. Økningen av de klimapregete variasjonene synes å være liten i forhold til reduksjonen av den feilen som skyldes tilvekst avsatt på trær som er felt i tilvekstperioden. En forkortelse av periodelengden fra 10 til 5 år synes heller ikke ha noen vesentlig innflytelse på målefeilen og representasjonsfeilen.

For mange formål er interessen knyttet til tilveksten for en kommende periode. Den vanligste måten er å forutsi denne tilveksten på grunnlag av en antatt sammenheng med tilveksten for en periode tidligere. Det hefter atskillige usikkerhetsmomenter ved en slik forutsigelse av tilveksten.

Den framtidige tilveksten kan også forutsies med støtte i spesielle erfaringstall („tilveksttabeller"). Slike tabeller foreligger foreløpig ikke for „unormal" norsk skog. Et visst holdepunkt for vurderingen av hvor nøyaktig en slik framgangsmåte er, kan en få ved å sammenlikne den aktuelle grunnflatetilveksten med den grunnflatetilveksten som kan beregnes på grunnlag av formler som foreligger (Eide og Langsæter 1941, Braathe 1953 b). Feilen på grunnflatetilvekstprosenten for en 5-års periode var 24,5 %. Det er ikke sannsynlig at tilveksten kan forutsies med større nøyaktighet ved bruk av tilveksttabeller enn ved de metodene som nå er i bruk hvis det blir brukt et noenlunde rimelig prøvetreantall.

The accuracy of some methods for estimating volume and increment on sample plots.

The estimation of volume and increment will always be based on sample plots. The size of the plots may vary according to the use they are to serve. When volume is to be found for a large area, plot sizes are ordinarily quite small. The volume need not be worked out separately

for each plot. Problems connected to this form of volume determination are not discussed in the report. Here, the discussion is limited to the case where volume and increment are to be found for a sample plot of a certain size.

There are a lot of methods that may be used in practice. Some of them give accurate results, but require much work. Other methods are simpler to use, but the results obtained are more inaccurate. It is important to know the accuracy of the different methods to be able to choose the most efficient method to be used in a particular case.

The relative accuracy of some sampling methods was compared. Stratified sampling, with allocation of the sample trees in proportion to the basal area sum, proved to be the most accurate method. Sampling with probability proportional to tariff volume or to basal area also gave good results.

This investigation was based on 42 plots located in spruce stands in different parts of eastern Norway. The height of all trees was measured, and at least 30 sample trees were taken in each plot for determination of increment. Some data for the plots are given in Table 3.1.

The following methods for estimating volume were examined:

1) Height curve,
2) Basal area line and „*dhf*-line",
3) Tariff, ratio estimator with random sampling and sampling with probability proportional to size („*PPS*"),
4) Stratified sampling,
5) Stand volume tables,
6) Different mean stems.

The height curve may be determined in different ways. Graphic smoothing is a rapid method, but the results will to a certain extent be dependent on the person doing the smoothing. The most accurate results are obtained when the curve is fitted by the method of least squares. The method of „grouped averages" also gives good results (see Figure 5.1). The standard error of the height curve has a characteristic form when a second degree polynomial is used for the smoothing. Figure 5.3 gives an example of this.

There is a strong correlation between the standard error of the height curve and the standard error of volume when both are expressed as percentages (Figure 5.4).

Table 5.3 shows the standard error of total volume found by means of height curves. On the average, the standard error was 3.5 per cent when 20 sample trees were used.

Volume may also be determined by basal area line (formulae 5.3–1 and 5.3–2) or *dhf*-line (formulae 5.3–10 and 5.3–11). The standard errors are shown in Table 5.5. On the average, the standard error was 3.9 per cent for both methods.

The height curve and the *dhf*-line may be considered as weighted regression estimators. It is quite remarkable that they do not give more accurate results than the basal area line, which is an unweighted regression estimator. The explanation seems to be that the height curve and the *dhf*-line both are built on equations of the form: $v = b_1 d^k + b_2 d^{k+1} \ldots$ with weights proportional to d^{-2k}. An estimator of this type does not give more accuracy than an unweighted estimator.

When an ordinary ratio estimator is used, estimation of volume by tariff gives almost the same accuracy as by height curve, basal area line or *dhf*-line, on the average 4.0 per cent. Greater accuracy was obtained by the use of sampling with probability proportional to tariff volume, on the average 3.2 per cent. The reason why this method seems to give such good results is discussed.

Stratified sampling with optimal allocation of the sample trees gives the most accurate results. Optimal allocation means that the sample trees are distributed on the strata in proportion to the product of standard deviation and number of stems in the stratum. This principle is difficult to apply in practice as the standard deviation will seldom be known in advance. It is, therefore, of interest to note that the estimates obtained by allocating the sample trees in proportion to the total basal area in each stratum have almost the same accuracy. The standard error of total volume estimated by 20 sample trees amounted to 2.7 per cent, on the average, when this allocation was used, as compared with 2.5 per cent with optimal allocation. The width of the strata was 2 centimeters.

The methods mentioned so far all gave results that were almost unbiased. The results according to the other methods (stand volume tables or mean stems) may have bias of importance.

Bias of the estimates given by a particular method may be *special* or *general*. *Special* bias means that the method used may give biased results for a single plot, but that the expected value for many plots is unbiased. The method itself is based on a correct principle. A method gives *general* bias when the average value for many plots is biased.

Volume determination by Nyyssönen's stand volume table resulted in estimates with general bias. The bias amounted to an average value of 5 per cent when the height was determined as Lorey's mean height. The standard deviation for the difference between computed and actual

volume also amounted to 5 per cent. That means that a special bias of 5 per cent is to be reckoned with in one of three cases.

Determination of volume by stand volume tables is based on total basal area and mean height. The standard error of the height, according to the height curve for a diameter that corresponds to the average basal area diameter, is given in Table 5.2. Table 5.8 shows the standard error of Lorey's mean height determined by a stratified sample. These last errors seem to be smaller than when the mean height is determined by the curve. The reason for the discrepancy is the bending of the height curve.

Determination of volume by mean stem methods (basal area-, tariff-, and Hohenadl's mean stems) all gave biased estimates. The bias was particularly great when the basal area mean stem method was used in young stands. The standard deviation for the difference between computed and actual volume was of the same magnitude as for volume determination by stand volume tables.

The term „growth" may mean the growth in a past period, current growth or future growth. There seems to be a difference between countries as to which of these definitions is ordinarily used.

Basal area increment of standing trees for a past period may be determined directly by means of increment cores. Special correction must be undertaken if the increment is to include bark increment. Different methods were examined:

1) Regression sampling based on the regression for basal area increment on basal area,
2) Regression sampling based on the regression for diameter increment on diameter,
3) Stratified sampling with allocation of sample trees proportional to basal area,
4) Sampling with probability proportional to size, with basal area as a measure of size.

The computed values for the basal area increment are given in Table 7.1.

Stratified sampling gave the most accurate estimates, the standard error being on the average 8.0 per cent with 20 sample trees. The difference between methods seemed to be quite small. The standard error was 8.8 per cent for „*PPS*-sampling" and 9.8 per cent for the regression estimator (formula 7.1–8). The standard error of the second regression estimator (formula 7.1–6) was not determined.

The methods most commonly used for determination of volume increment on the basis of basal area increment alone, do not seem to be good.

The possibility of determining the form-height increment on the basis of site curves ought to be given closer scrutiny.

The standard error of volume increment, estimated in different ways, is shown in Table 7.4. There are only small differences between the methods. The standard error was on the average 6.0 per cent for stratified sampling, 5.3 per cent for „*PPS*-sampling" and 6.6 per cent for regression sampling.

A comparison of the standard errors for basal area increment with those of volume increment shows that volume increment is determined with greater accuracy for a given number of sample trees. The reason for this seems to be that a certain increment in basal area alone, results in a negative form-height increment.

Increment on trees that have been felled during the period will always constitute a factor of uncertainty. The error due to neglecting this increment will be greater the longer the period is. Shortening of the period will tend to reduce this error, but will increase the sampling error and errors due to climatic variations and inaccurate measurements. There seem to be strong reasons for shortening the period from 10 years to 5 years, even if the errors that increase are taken into account.

The growth for a coming period is in many cases of greater interest than the other terms of growth. The usual way, in Norway and Sweden, for predicting future growth is to assume that there will be a close relationship between this growth and that of a past period. The error will be large because of the many uncertain factors.

Growth may also be predicted by means of special tables. At present, however, there are no tables suitable for use in „un-normal" stands. A clue as to the accuracy of this method may be obtained by comparing the actual values of basal area increment with the values computed on the basis of a special formula (7.5–2). The error was found to be 24.5 per cent.

Litteratur.

Abadie, J., 1956: Etudes mathématiques et statistiques. – Ann. Ec. Eaux For. Nancy 15. s. 11–135.

Anderson, R. L. og Bancroft, T. A., 1952: Statistical theory in research. – Mc Graw Hill Book Co. N.Y. 399 s.

Assmann, E., 1936: Zur Frage der Kopezky-Gerhardtschen Linien. – Mitt. Forstwirt. u. Forstwiss. 7. s. 127–168.

— 1943: Untersuchungen über die Höhenkurven von Fichten-Beständen. – Allg. Forst- u. Jagdztg. 119 s. 77–88, 105–123, 133–151.

— 1952/53: Die Verlagerung der Höhenkurven von Plenterwaldflächen und ihre Ursachen. – Allg. Forst- u. Jagdztg. 124. s. 175–177.

Baker, G. A., 1941: Linear regression when the standard deviations of arrays are not all equal. – Jour. Amer. Stat. Ass. 36. s. 500–506.

Bitterlich, W., 1948: Die Winkelzählprobe. – Allg. Forstztg. 59. s. 4–5.

Brantseg, A., 1951: Kubikk- og produksjonsundersøkelser i vest-norske granplantninger. Medd. Vestl. forstl. Forsøkssta. 28. s. 1–109.

Bronsart, H. D. von, 1936: Einheitshöhentafeln zur Vereinfachung der Holzvorratsaufnahmen. – Der Deutsche Forstwirt 18. s. 61–64.

Brunn, H., 1931: Die Holzmassenkurve. – Forstwiss. Cbl. 53. s. 218–230, 250–262.

Braathe, P., 1953 a: Undersøkelser over utviklingen av glissen gjenvekst av gran. – Medd. norske Skogforsøksv. 12. s. 213–301.

— 1953 b: Noen betraktninger og beregninger over grunnflatetilveksten i enaldret granskog. – Det norske Skogforsøksv. Internt P.M. 16 s.

Bækken, A. O., 1932: Om beregning av massetilveksten i granskog. – Medd. norske Skogforsøksv. 4. s. 593–625.

Bøhmer, J. G. og Seip, H. K., 1952: Sammnehengen mellom tilvekst og noen eksteriøre mål på gran. – Meldinger fra Norges Landbrukshøgskole 32. s. 1–16.

Cochran, W. G., 1942: Sampling theory when the sampling units are of unequal sizes. Jour. Amer. Stat. Ass. 37. s. 199–212.

— 1953: Sampling techniques. – Wiley & Sons, N.Y.-Chapman & Hall, London. 330 s.

David, F. N. og Neyman, J., 1938: Extension of the Markoff theorem on least squares. Stat. Res. Mem. 2. s. 105–116.

Deming, W. E., 1948: Statistical adjustment of data. – 2. utg. Wiley & Sons, N.Y. – Chapman & Hall, London. 261 s.

Eide, E., 1923: Kubering av staaende skog. II. Granskog. – Medd. norske Skogforsøksv. 1,4. s. 15–80.

— 1927: Kubering av stående skog. IV. Granens form innenfor bark. – Medd. norske Skogforsøksv. 2,9. s. 5–126.

— og Langsæter, A., 1941: Produksjonsundersøkelser i granskog. – Medd. norske Skogforsøksv. 7. s. 355–500.

Eklund, B., 1942: Studier över årsringsvariationerna å Malingsbo fasta provyta n:r. 1. Svenska SkogsvFören. Tidskr. 40. s. 233–310.

— 1957: Om granens årsringsvariationer inom mellersta Norrland och deras samband med klimatet. – Medd. SkogsforsknInst., Stockh. 47,1. 63 s.

Emrovic, B., 1953 a: O upotrebi standardnih visenskih krivulja. (Über den Gebrauch von Standardhöhenkurven). – Šum. List 77. s. 78–94.

— 1953 b: O konstrukciji lokalnih jednoulaznih drvnogromadnih tablica (tarifa). (On the preparation of volume tables based on D.B.H. only («Tariffs»). – Šum. List 77. s. 214–221.

Erteld, V., 1957: Grundflächenschluss und Zuwachs bei Kiefer, Fichte und Buche. – Wiss. Abh. Dtsch. Akad. Landwirtsch. 21. 178 s.

Essed, F. E., 1957: Estimation of standing timber. – [Diss.] H. Veenman & Zonen, Wageningen. 60. s.

Flury, Ph., 1897: Berechnung der Holzmasse eines stehenden Bestandes mit dem Massenfaktor V/G. – Mitt. schweiz. Anst. forstl. Versuchsw. 5. s. 191–202.

Fog, D. og Jensen, A., 1954: General volume table for beech in Denmark. – Forstl. Forsøgsv. Danm. 21. s. 93–137.

Gieruszunski, T., 1956: Struktura i zmienność pozyrostów drzew w drzewostanach świer-

kowych w różnych środowiskach ekologicznych. (Über den Aufbau und die Variabilität der Baumzuwachswerte in Fichtenbeständen in verschiedenen ökologischen Verhältnissen.) – Sylwan 100,3 seria A. s. 14–18.

Hagberg, N., 1939: Hur går höjdkurvan? En jämförande översikt över trädens ,beståndens och skogarnas höjdkurvor. – Skogen 26. s. 288–292.

Hasel, A. A., 1942: Estimation of volume in timber stands by strip sampling. – Ann. Math. Stat. 13. s. 179–206.

Haugberg, A., 1927: Undersøkelser av våre kuberingsmåters nøiaktighet og granens form. Tidsskr. Skogbr. 35. s. 376–388, 428–447.

Hausser, K., 1953/54: Ergebnisse der Überprüfung verschiedener Methoden der Massenermittlung bei Kiefer auf Grund von Kahlschlagaufnahmen. – Allg. Forst- u. Jagdztg. 125. s. 314–319.

Henriksen, H. A., 1950: Højde-diameter diagram med logaritmisk diameter. – Dansk Skovforen. Tidsskr. 35. s. 193–202.

Hirata, T., 1955: Vertical angle count sampling. – J. Jap. For. Soc. 37. s. 479–480.

Hohenadl, W., 1924: Ziele und Methoden der forstlichen Forschung oder «Praktischer Beweis dass die Mathesis bei dem Forstwesen unentbehrliche Dienste tue». – Forstwiss. Cbl. 46. s. 611–625, 655–666, 709–721, 756–767.

— 1929: Die Berechnung des Holzgehaltes von Beständen mit Hilfe von zwei Mittelstämmen. – Zbl. ges. Forstw. 55. s. 26–37.

— 1932: Die Vereinfachung der Bestandsberechnung. – Forstwiss. Cbl. 54. s. 681–693, 734–745.

— 1936: Die Bestandsmessung. – Forstwiss. Cbl. 58. s. 51–61, 69–86, 114–127.

— 1939: Einführung in die Bestandsberechnung mit Hilfe von zwei Mittelstämmen. Forstwiss. Cbl. 61. s. 261–280.

Holmsgaard, E., 1945: Aarringsanalyser fra Midtjylland. – Dansk Skovforen. Tidsskr. 30. s. 129–173.

Hummel, F. C., 1955: The volume-basal area line. – Bull. For. Comm., London. 24. 84 s.

— 1956: Die Massengerade als Grundlage von Einheitstarifen für den Altersklassenwald. – Forstwiss. Cbl. 75. s. 91–105.

Ilvessalo, Y., 1956: On the methods for determination of increment generally used in Finland. – [Docum.] 12th Congress IUFRO. 7 s.

Jonson, T., 1928: Några nya metoder för beräkning av stamvolym och tillväxt hos stående träd. – Svenska SkogsvFören. Tidskr. 26. s. 423–527.

Ker, J. W., og Smith, J. H. G., 1955: Advantages of the parabolic expression of height-diameter relationships. – For. Chron. 31. s. 236–246.

— 1957: Sampling for height-diameter relationships. – J. For. 55. s. 205–207.

Keylwerth, R., 1954: Die Genauigkeit quantitativer Zuwachsanalysen. – Holz Roh- u. Werkstoff 12. s. 41–44.

Klepac, D., 1953: Uredajne tablice. (Tarifs d'aménagement, Einrichtungmassentafeln.) Šum. List 77. s. 192–206.

Kondo, M., 1954: (Statistical researches on timber survey. A study of the precision of classical sample tree methods, as depends on the type of the D.B.H. distributions, based on modern mathematical statistics.) – Special Bull. Coll. Agr. Utsunomiya Univ. 175 s.

Korsun, F., 1948: Grafikon výšek. (Graph of heights.) – Lesn. Práce 27. s. 326–337.

Krenn, K., 1940: Über Näherungsverfahren zur Berechnung der Durchmesser der Hohenadlschen Mittelstämme, dargestellt an einem extremen Bestandesbeispiel. – Allg. Forst- u. Jagdztg. 116. s. 228–234.

— 1941: Die Hohenadl'schen Mittelstämme als Zuwachsmittelstämme und ihre Bedeutung für die Praxis der Zuwachsermittlung an Beständen. – Allg. Forst- u. Jagdztg. 117. s. 213–230, 243–263, 279–287.

— 1944: Die Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme. – SchrReihe Akad. Dtsch. Forstwirt. 8. 119 s.

— 1948: Tarife zur Massenberechnung von Beständen. – SchrReihe bad. forstl. VersAnst. 6. 43 s.

Krutsch, A. K. H. og Loetsch, F., 1938: Holzvorratsinventur und Leistungsprüfung. J. Neumann – Neudamm. 164 s.

Kräuter, G., 1955: Das Waldhöhentarif-System. – Arch. Forstw. 4. s. 226–231.

— 1956: Zu einigen Fragen der Massenzuwachsermittlung. – Arch. Forstw. 5. s. 753–768.

Kuusela, K., 1954: Zur Theorie der forstlichen Zuwachsberechnung auf Grund der periodischen Messung. – Acta for. fenn. 60,1. s. 1–136.

Laar, A. van, 1951: Een oriënterend onderzoek naar de nauwkeurigheid van de opstandsmassabepaling volgens de methode van Hohenadl. (Über die Genauigkeit der Bestandesmassenberechnung nach dem Verfahren von Hohenadl.) – Ned. Boschb.-Tijdschr. 23. s. 302–313.

Lang, A., 1938: Bestandes-Einheitshöhenkurven der Württ. Forsteinrichtungsanstalt. Allg. Forst- u. Jagdztg. 114. s. 168–176.

Langsæter, A., 1928: Massekurvemetodene eller differensmetodene. – Skogbrukeren 3. s. 271–276.

— 1929: Diameterklassenes gjennemsnittlige diameter. – Medd. norske Skogforsøksv. 3. s. 217–241.

— 1930: Høideanalyse av forsøksfelter ved hjelp av stående prøvetrær. – Medd. norske Skogforsøksv. 3. s. 463–471.

— 1934: Nøiaktigheten ved linjetaksering av skog. II. Bestemmelse av høide og årringbredde. – Medd. norske Skogforsøksv. 5. s. 405–448.

— 1937: Bestemmelse av formhøidetilveksten hos gran og furu. I. De nu brukte beregningsmåter. – Medd. norske Skogforsøksv. 6. s. 21–49.

— 1944: Om tilvekstberegning. – Skogbrukeren 19. s. 117–119, 125–126, 133–135.

Lethpere, R., 1958: [Review of] New ways of using the general tariff tables for conifers. By H.D.S. Finch. Forestry 31. s. 103–105.

Levakovic, A., 1926: O odnošaju drvnog prirasta u stabala naprama jednoj komponenti toga prirasta. (Über das Verhalten des Baummassenzuwachses zu einer seiner Komponenten.) – Glasn. sumske Pokuse 1. s. 9–51.

— 1935: Analitički izraz za sastojinsku visinsku krivulja. (Analytischer Ausdruck für die Bestandeshöhenkurven.) – Glasn. sumske Pokuse 4. s. 283–310.

Loetsch, F., 1952: Der Einfluss von Höhenstufen und Holzarten auf einen einheitlichen Massentarif bei mitteleuropäischen Waldvorratsinventuren. – Z. Weltforstwirt. 15. s. 185–196.

— 1953: Massenzuwachsermittlung durch Bohrspanproben unter Anwendung mathematisch-statistischer Methoden. – Z. Weltforstwirt. 16. s. 77–98.

— 1954 a: Zur Schneider'schen Zuwachsprozentformel. – Forstwiss. Cbl. 73. s. 29–35.

— 1954 b: Das Tarifdifferenzverfahren zur Massenzuwachsermittlung. – Schweiz. Z. Forstw. 105. s. 207–233. 276–296.

— 1956: Die Bedeutung des Merkmals «Kronengüteklasse» bei Holzvorrats- und Zuwachsinventuren. – [Docum.] 12th Congress IUFRO. 6 s.

Matérn, B., 1947: Metoder att uppskatta noggrannheten vid linje- och provytetaxering. Medd. SkogsforsknInst., Stockh. 36,1. 138 s.

— 1956: On the geometry of the cross-section of a stem. – Medd. SkogsforsknInst., Stockh. 46,11. 28 s.

Mattson Mårn, L., 1931: Bedömningsfelen vid höjd- och toppskottsmätning. – Svenska SkogsvFören. Tidskr. 29. s. 97–119.

Meyer, H. A., 1940: A mathematical expression for height curves. – J. For. 38. s. 415–420.

— 1942: Methods of forest growth determination. – Bull. Pa. Agric. Exp. Sta. 435. 93 s.

Michailoff, I., 1943: Zahlenmässiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven. – Forstwiss. Cbl. 65. s. 273–279.

Mitscherlich, G., 1952: Der Tannen-, Fichten- (Buchen-) Plenterwald. – SchrReihe bad. forstl. VersAnst. 8. 42 s.

Müller, U., 1923: Lehrbuch der Holzmesskunde. – 3. utg. Parey, Berlin. 416 s.

Möller, C. M., 1946: Untersuchungen über Laubmenge, Stoffverlust und Stoffproduktion des Waldes. – Forstl. Forsøgsv. Danm. 17. s. 1–287.

Nair, K. R. og Shrivastava, M. P., 1942: On a simple method of curve fitting. – Sankhya 6. s. 121–132.

Neubauer, W., 1924: Die Bestandesaufnahme nach dem Verfahren des Massenmittelstammes und nach Stammklassen gleicher Masse. – Zbl. ges. Forstw. 50. s. 23–33, 105–115. 51. s. 1–29, 90–111.

— 1932: Zur Frage der kombinierten Verwendung von Massentafeln und Probestämmen bei Bestandesaufnahmen. – Zbl. ges. Forstw. 58. s. 305–320.

Nordquist, M., 1924: Bidrag till kännedomen om förhållandet mellan stamfaktorerna i rena tallbestånd. – Svenska SkogsvFören. Tidskr. 22. s. 175–196.

Nyyssönen, A., 1951: Havaintoja metsikön kasvun arvioimistavoista. (Observations on the methods of estimating the growth of a stand.) – Metsät. Aikak. 68. s. 167–171.

— 1955: Metsikön kuutiomäärän arvioiminen relaskoopin avulla. (Estimation of stand volume by means of the relascope.) – Commun. Inst. for. Fenn. 44,6. 31 s.

— 1956 a: On the methods of determination of stand growth in U.S.A. – [Docum.] 12th Congress IUFRO 12 s.

— 1956 b: Hakkuumäärän arvioiminen kannoista. (Estimation of the cut from stumps.) Commun. Inst. for. Fenn. 45,5. 68 s.

Näslund, M., 1929: Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet. – Medd. Skogsförsöksanst., Stockh. 25. s. 93–170.

— 1937: Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog. Primärbearbetning. – Medd. Skogsförsöksanst., Stockh. 29. s. 1–170 + 74 s.

— 1944: Antalet provträd och kubikmassans noggrannhet vid stamräkning av skog. Medd. Skogsförsöksanst., Stockh. 34. s. 285–308.

— 1947: Funktioner och tabeller för kubering av stående träd. Tall, gran och björk i södra Sverige samt i hela landet. – Medd. SkogsforsknInst., Stockh. 36,3. 81 s.

Ording, A., 1941: Årringanalyser på gran og furu. – Medd. norske Skogforsøksv. 7. s. 101–354.

Peschel, W., 1936: Neuere Verfahren der Bestandsmassenermittlung nach Probestämmen, ihre mathematisch-statistische Begründung und ihre Erprobung an einem praktischen Bestandsbeispiel. – Thar. forstl. Jahrb. 87. s. 889–921. 88. s. 1–50.

Petrini, S., 1949: Tillväxtprognoser vid skogsindelning. Två problem. – Skr. K. Skogshögsk., Stockh. 2. 12 s.

— 1957: En överblick över metodiken vid tillväxtprocentberäkning. – Norrlands SkogsvFörb. Tidskr. 1957. s. 111–120.

Popovic, B., 1956: Nepravilna primena metoda najmanjih kvadrata pri obredivanju

visinske krive sastojine. (Nekorekta apliko de la metodo de minimuma kvadratsumo ce eltrovado de alteckurbo de arbkomplekso.) – Rad. poljoprivred.-šum. Fak., Sarajevo. B. Šumarstvo 1. s. 161–175.

PRODAN, M., 1949: Die Bestimmung des Massenzuwachses von Beständen mit Hilfe des Massenzuwachsprozentes. – Forstwiss. Cbl. 68. s. 292–299.

— 1951: Messung der Waldbestände. – J. D. Sauerländer, Frankfurt/M. 260 s.

— 1956: Möglichkeiten der Zuwachsermittlung. – [Docum.] 12th Congress IUFRO. 16 s.

RICHTER, A., GROSSMANN, H. og THIELE, H., 1956: Zur Frage der Zuwachsermittlung mit Hilfe von Bohrspanproben. – Arch. Forstw. 5. s. 104–125.

SCHAEFFER, L., 1949: Tarifs rapides et tarifs lents. – Rev. for. franç. 1. s. 7–13.

SCHOBER, R., 1933: Untersuchungen über die Ertragsleistung und die Frage des Massenermittlungsverfahrens bei einer Buchen-Kiefer-Mischbestandsversuchsfläche. – Forstwiss. Cbl. 55. s. 199–213.

SCHUMACHER, F. X. og HALL, F. S., 1933: Logarithmic expression of timber-tree volume. J. agr. res. 47. s. 719–734.

SEIP, H. K., 1952: Relaskopet. – Tidsskr. Skogbr. 60. s. 22–26.

— 1957: Målefeil ved bestemmelse av radietilveksten. – Medd. norske Skogforsøksv. 14. s. 557–569.

SKADSHEIM, M., 1953: Instrumenter for måling av trehøyder. – Tidsskr. Skogbr. 61. s. 290–296.

SOLBRAA, T., 1937: Feilen ved skjønnsmessig toppskuddansettelse. – Tidsskr. Skogbr. 45. s. 317–325.

SPEER, W., 1938: Über die Genauigkeit einiger Massenermittlungsmethoden, dargestellt an praktischen Beispielen. – Allg. Forst-u. Jagdztg. 114. s. 385–401.

SPEIDEL, G., 1949: Die Schneidersche Konstante. – Forstwiss. Cbl. 68. s. 161–183.

— 1957: Die rechnerischen Grundlagen der Leistungskontrolle und ihre praktische Durchführung in der Forsteinrichtung. – SchrReihe forstl. Fak. Univ. Göttingen 19. 118 s.

SPURR, S. H., 1952: Forest inventory. – Ronald Press Co., N.Y. 476 s.

— 1954: Simplified computation of volume and growth. – J.For. 52. s. 914–922.

STOFFELS, A., 1950: De hoogtekromme en de gemiddelde hoogte van en opstand. (The heightcurve and the mean height of a stand.) – Ned. Boschb.-Tijdschr. 22. s. 97–103.

— 1953: De inhoudsbepaling van grovedennenopstanden mit behulp van standaardkrommen. (Le cubage des peuplements de pins sylvestres avec la méthode des tarifs.) Ned. Boschb. – Tijdschr. 25. s. 29–42.

— 1957 a: De aanwasbepaling van grovedennenopstanden. (La détermination de l'accroisement des peuplements de pins sylvestres.) – Ned. Boschb.-Tijdschr. 29. s. 8–14.

— 1957 b: Snelle bepaling van het aanwasprocent van grovedennenopstanden. (Détermination rapide du taux d'accroisement de peuplements de pins sylvestres.) – Ned. Boschb.-Tijdschr. 29. s. 130–135.

— og SOEST, J. VAN, 1953: Principiële vraagstukken bij proefperken. 3. Hoogteregressie. (Height regression.) – Ned. Boschb.-Tijdschr. 25. s. 190–199.

STRAND, L., 1956: Pinnerelaskop og prismerelaskop. – Norsk Skogbr. 2. s. 216–219.

— 1957: Virkningen av flatestørrelsen på nøyaktigheten ved prøveflatetakster. – Medd. norske Skogforsøksv. 14. s. 621–633.

— 1958: Sampling for volume along a line. – Medd. norske Skogforsøksv. 15 s. 325–331.

SUKHATME, P. V., 1953: Sampling theory of surveys with applications. – Indian Soc. Agr. Stat., New Delhi – Iowa State Coll. Press. Iowa. 491 s.

TIRÉN, L., 1929: Über Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit. – Medd. Skogsförsöksanst., Stockh. 25. s. 227–304.

Tischendorf, W., 1925 a: Die Genauigkeit von Messungsmethoden und Messungsergebnissen bei Holzmassenermittlungen. – Forstwiss. Cbl. 47. s. 317–333, 415–436, 506–515, 614–625.

— 1925 b: Mittelstammdimensionen. – Forstwiss. Cbl. 47. s. 787–798.

— 1927: Lehrbuch der Holzmassenermittlung. – Paul Parey, Berlin. 218 s.

— 1933: Studie zur Kopezky-Gerhardtschen m-, gh- und gf-Linie. – Forstwiss. Cbl. 55. s. 866–875.

— 1937: Die Eignung verschiedener Verfahren der Bestandesmassenermittlung mit Hilfe von Massentafeln. – Zbl. ges. Forstw. 63. s. 129–140.

Trampler, T. og Sikora, B., 1956: Das Verfahren der Zuwachsermittlung bei Forsteinrichtungsarbeiten in Polen. – [Docum.] 12th Congress IUFRO. 6 s.

Wahlenberg, W. G., 1941: Methods of forecasting timber growth in irregular stands. Tech. Bull. U.S. Dep. Agric. 796. 55 s.

Wally, O., 1925: Die Ermittlung des Massenzuwachsprozentes an stehenden Stämmen und Beständen. – Zbl. ges. Forstw. 51. s. 314–351.

Wiedemann, E., 1936: Über die Vereinfachung der Höhenermittlung bei den Vorratsaufnahmen. – Mitt. Forstwirt. u. Forstwiss. 7. s. 381–412.

Wishart, J. og Metakides, T., 1953: Ortogonal polynomial fitting. – Biometrika 40. s. 361–369.

Woolf, B., 1951: Computation and interpretation of multiple regressions. – J. Roy. Stat. Soc. B 13. s. 100–112.

Yates, F., 1953: Sampling methods for censuses and surveys. – 2. utg. Griffin & Co, London. 401 s.

Östenå, B., 1956: Hovedoppgave i skogtaksasjon. – [Maskinskrevet manuskript.] 25 s.

Trykt hos J. Chr. Gundersen
Oslo - 1959